29.04.2019

In $\mathbb{R}^3$ euclideo con base $B = \left\{ \overset{v_1}{\overset{\shortparallel}{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}}, \overset{v_2}{\overset{\shortparallel}{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}}, \overset{v_3}{\overset{\shortparallel}{\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}}} \right\}$ dare una base ortogonale mediante il teorema di ortogonalizzazione; devo determinare la base $B_\perp = \{ w_1, w_2, w_3 \}$ con $w_i \perp w_j \ \forall i \neq j$ (o $w_i \cdot w_j = 0 \ \forall i \neq j$)

Prendo $w_1 = v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, scomponiamo v_2 nella somma di due vettori il primo di essi deve stare nel sottospazio generato da v_1, quindi

$v_2 = \underbrace{\alpha v_1}_{\in \langle\langle v_1 \rangle\rangle = \langle\langle w_1 \rangle\rangle} + w_2$ con $w_2 \in \langle\langle w_1 \rangle\rangle^\perp \Rightarrow v_2 = \alpha w_1 + w_2 \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + w_2$

$\Rightarrow w_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ cerco α; so che $w_2 \cdot w_1 = 0 \Rightarrow \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right) \cdot$

$\cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix}1-\alpha\\1\\1-\alpha\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 1 - \alpha + 1 - \alpha = 0$

$2 - 2\alpha = 0$

$\alpha = 1$

$\Rightarrow w_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ faccio il prodotto scalare fra w_2 e w_1 e verifico che dia come risultato 0.

Decompongo v_3 ~~come~~ $= \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + w_3$ con $w_3 \in \langle\langle w_1, w_2 \rangle\rangle^\perp =$ $= \langle\langle v_1, v_2 \rangle\rangle^\perp$

$w_3 = v_3 - \beta_1 w_1 - \beta_2 w_2$ devo determinare β_1 e β_2

$$\begin{cases} w_3 \cdot w_1 = 0 \\ w_3 \cdot w_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} - \beta_1 \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \beta_2 \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 0 \\ \left(\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} - \beta_1 \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \beta_2 \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix}2-\beta_1\\1-\beta_2\\-1-\beta_1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 0 \\ \begin{pmatrix}2-\beta_1\\1-\beta_2\\-1-\beta_1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\beta_1 + 1 = 0 \\ 1 - \beta_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = 1/2 \\ \beta_2 = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow w_3 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ -3/2 \end{pmatrix}$; la base cercata è dunque $B_\perp = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ -3/2 \end{pmatrix} \right\}$

Supponiamo di ~~xxxxxxx~~ cercare una base ortonormale $B_{\perp n}$

$B_{\perp n} = \{ u_1, u_2, u_3 \}$: cerco la norma, che è data da:

$\| w_1 \| = \sqrt{w_1 \cdot w_1} = \sqrt{2}$

$\| w_2 \| = \sqrt{w_2 \cdot w_2} = \sqrt{1} = 1$

$\| w_3 \| = \sqrt{w_3 \cdot w_3} = \sqrt{9/2} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \sqrt{u_1 \cdot u_1} = \sqrt{1/2 + 1/2} = 1$

Infatti $u_1 = \frac{w_1}{\| w_1 \|} \Rightarrow u_1 \cdot u_1 = \frac{w_1}{\| w_1 \|} \cdot \frac{w_1}{\| w_1 \|} = \frac{1}{\| w_1 \|^2} \, w_1 \cdot w_1 = \frac{\| w_1 \|^2}{\| w_1 \|^2}$

$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $u_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Dati i vettori $v_1, \dots, v_k$ in uno spazio euclideo n-dimensionale $\mathbb{R}^n$, $\Rightarrow$ la matrice $\begin{pmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 & \cdots & v_1 \cdot v_k \\ v_2 \cdot v_1 & v_2 \cdot v_2 & \cdots & v_2 \cdot v_k \\ \vdots & & & \vdots \\ v_k \cdot v_1 & v_k \cdot v_2 & \cdots & v_k \cdot v_k \end{pmatrix}$ è detta matrice di Gram relativa ai vettori $v_1, \dots, v_k$ k qualunque.

Il suo determinante è detto gramiano $= G(v_1, \dots, v_k)$.

PROPRIETÀ:

Se i vettori $v_1, \dots, v_k$ con $k \leq n$ sono linearmente indipendenti $\Rightarrow$ la matrice di Gram è la matrice associata al prodotto scalare ristretto al sottospazio ~~generato~~ $\langle\langle v_1, \dots, v_k \rangle\rangle$; in questo caso il gramiano è $\neq 0$ e in particolare > 0 (PER IL TEOREMA DI JACOBI, ESSENDO IL PRODOTTO SCALARE DEFINITO POSITIVO)

Se invece i vettori sono linearmente dipendenti il gramiano è nullo ; ~~xxxxxxxxxx~~ $\Rightarrow G(v_1, \dots, v_k) = 0$

Ad esempio $v_1, v_2 = \alpha v_1 \Rightarrow G(v_1, v_2) = \begin{vmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 \\ v_2 \cdot v_1 & v_2 \cdot v_2 \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot \alpha v_1 \\ \alpha v_1 \cdot v_1 & \alpha v_1 \cdot \alpha v_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_1 \cdot v_1 & \alpha (v_1 \cdot v_1) \\ \alpha (v_1 \cdot v_1) & \alpha^2 (v_1 \cdot v_1) \end{vmatrix} = (v_1 \cdot v_1)^2 \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha^2 \end{vmatrix} = 0$$

Vale il viceversa! QUINDI i vettori $v_1 \dots v_k$ sono linearmente dipendenti $\Leftrightarrow$ il gramiano vale 0.

Dati i vettori lin. indipendenti $v_1, \dots v_k$ in $\mathbb{R}^n \Rightarrow$ posso ortogonalizzarli determinando i vettori $w_1, \dots, w_k \Rightarrow$ si dimostra che $G(v_1, \dots v_k) = \|w_1\| \|w_2\| \cdots \|w_k\|$ in particolare, se i vettori $v_1, \dots v_k$ sono ortogonali $\Rightarrow$
$\Rightarrow G(v_1, \dots, v_k) = \|v_1\| \|v_2\| \cdots \|v_k\|$

Esempio nel caso di due vettori $v_1, v_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 \\ v_2 \cdot v_1 & v_2 \cdot v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} w_1 \cdot w_1 & w_1 \cdot v_2 \\ v_2 \cdot w_1 & v_2 \cdot v_2 \end{pmatrix} \overset{R_2 - \alpha R_1 \to R_2}{\sim} \begin{pmatrix} w_1 \cdot w_1 & w_1 \cdot v_2 \\ v_2 \cdot w_1 - \alpha w_1 \cdot w_1 & v_2 v_2 - \alpha w_1 \cdot v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \cdot w_1 & w_1 \cdot v_2 \\ (v_2 - \alpha w_1) \cdot w_1 & (v_2 - \alpha w_1) \cdot v_2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{-\alpha e^1 + e^2 \to e^2}{\sim} \begin{pmatrix} w_1 \cdot w_1 & w_1 \cdot v_2 - \alpha w_1 \cdot w_1 \\ (v_2 - \alpha w_1) \cdot w_1 & (v_2 - \alpha w_1) \cdot v_2 - \alpha (v_2 - \alpha w_1) \cdot w_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} w_1 \cdot w_1 & w_1 \cdot (v_2 - \alpha w_1) \\ (v_2 - \alpha w_1) \cdot w_1 & (v_2 - \alpha w_1)(v_2 - \alpha w_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|w_1\|^2 & w_1 \cdot w_2 \\ w_2 \cdot w_1 & w_2 \cdot w_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \|w_1\|^2 & 0 \\ 0 & \|w_2\|^2 \end{pmatrix}$$

le trasformazioni adoperate sono determinantal (il gramiano iniziale coincide con quello della matrice ridotta equivalente)

<u>Proposizione</u>: In $\mathbb{R}^n$ euclideo considero i vettori $v_1, \dots, v_k$ lin. indip $\Rightarrow$ tali vettori pensati come vettori geometrici possono essere visti come lati di un parallelepipedo P

il cui volume, $V(P) = \sqrt{G(v_1, \dots, v_k)}$

Dimostrazione per induzione su k

1) verifica per $k = 1$ $\quad v_1 = P(v_1)$ = il segmento definito da v_1, in questo caso $V(P)$ è la lunghezza di v_1 che sappiamo essere la norma di v_1 ($\|v_1\|$) che coincide con $\sqrt{v_1 \cdot v_1}$

2) Supponiamo vera la proposizione fino a $n = k-1$ e dimostriamolo per k vettori: SAPPIAMO DALLA GEOMETRIA ELEMENTARE CHE

$$V(P(v_1, \dots, v_k)) = V(P(v_1, \dots, v_{k-1})) \cdot \|w_k\|$$

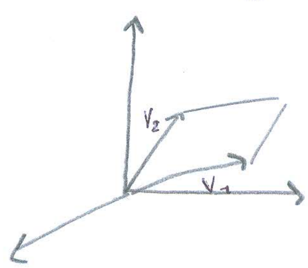
($\|w_k\|$ rappresenta l'altezza del parallelepipedo)

$$= \text{per ipotesi induttiva} = \sqrt{G(v_1, \dots, v_{k-1})} \cdot \|w_k\| = \underbrace{\sqrt{G(v_1, \dots, v_{k-1})}}_{\|w_1\|^2 \cdots \|w_{k-1}\|^2} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{w_k \cdot w_2} = \sqrt{(w_1 \cdot w_1)(w_2 \cdot w_2)(w_{k-1} \cdot w_{k-1}) \cdot (w_k \cdot w_k)}$$

$$= \sqrt{G(v_1 \dots v_k)}$$

Esempio: calcolare l'area del parallelogramma costruito sui vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$



Area $P(v_1, v_2) =$

$$= \sqrt{\begin{vmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 \\ v_2 \cdot v_1 & v_2 \cdot v_2 \end{vmatrix}} = \sqrt{\begin{vmatrix} 14 & 8 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}}$$

$$= \sqrt{14 \cdot 5 - 64}$$

Esercizio: calcolare l'area DEL TRIANGOLO CON VERTICI $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$