RIPRENDIAMO L'ESERCIZIO DELL'ULTIMA LEZIONE: RICORDIAMO 29/05/2019

CHE: $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ nella base canonica di $\mathbb{R}^3$

ad essa è associato un operatore isometrico perché A ortogonale.

Poiché $|A| = 1$ e la matrice non è simmetrica $\Rightarrow$ T è una rotazione pura (rotazione di $\mathbb{R}^3$ attorno a un asse)

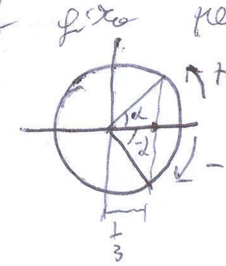
l'asse è l'autospazio E_1

$$r: \begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow r = \left\langle\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle$$

La direzione del fascio di piani di rotazione è $x + z = 0$.

L'angolo piano di rotazione, α, può essere trovato sfruttando ~~[illegible]~~ l'invariante di similitudine $T_r(A)$: $\frac{5}{3} = 1 + 2\cos\alpha$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{3}$ Ci sono 2 angoli nell'angolo giro per cui vale questa relazione



(IV) per trovare il verso di rotazione: Determina la seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \end{pmatrix}$$

vettore di base dell'asse di rotazione

trasformato del vettore del piano di rotazione le cui COORDINATE DEFINISCONO LA 2ª COLONNA

vettore appartenente al PIANO DI ROTAZIONE

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

La matrice è $\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{2}{3}\\ 0 & 1 & \frac{1}{3}\\ 1 & 0 & -\frac{2}{3}\end{pmatrix} = B$ troviamo il determinante che determina se la terna è destrorsa o no.

$|B| < 0$ (LA TERNA E' SINISTRORSA)

(IV) $\Rightarrow$ il verso di rotazione è orario

$\boxed{\text{se } |B|>0 \text{ è antiorario}}$ (LA TERNA E' DESTRORSA)

(Notare che il verso di rotazione dipende dalla scelta del vettore di base dell'asse (prima colonna))

$\Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ $\Rightarrow$ QUINDI $\alpha = \operatorname{arcosen} -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\Rightarrow$ La matrice nella base $B_{\perp n}$ è

(V) $[T]_{B_{\perp n}} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\sqrt{2}\\ 0 & -\frac{2}{3}\sqrt{2} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$, determiniamo ora la base $B_{\perp n}$

• Le colonne della matrice sono date dalle coordinate delle trasformate dei vettori della base $B_{\perp n}$, nella base $B_{\perp n}$ del codominio

$\Rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ è un vettore di base dell'asse

$\begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ asse $= \left\langle\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle$ ma essendo la base ortonormale prendo il vettore $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3}\sqrt{2}\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\ \frac{2}{3}\sqrt{2}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ stanno nel piano di rotazione (devono stare in un piano ortogonale al primo)

(vi) $B_{\perp M} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right\}$ → $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ è perpendicolare a $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

NORMALIZZATO

e appartiene al piano ⇒

VETTORE DELL'ASSE NORMALIZZATO

VETTORE appart. al piano, normalizzato

$\Rightarrow 0 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = y = 0 \quad \Sigma: \begin{cases} z = -x \\ y = 0 \end{cases}$

$z=-x$ → deve stare nel piano di rotazione

$y=0$ → deve essere ortogonale a $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \left\langle\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\rangle\right\rangle = Sol\,\Sigma \Rightarrow$ normalizzo il vettore $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

⇒

(vi) $B_{\perp M} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\0\\-\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\right\}$.

(vii) Dove S tale che $[T]_{B_{\perp M}} = S^{-1} A S$

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{E}, \mathbb{R}^3) \arrow[r, "{[T]_{\mathcal{E}} = A}"] & (\mathbb{R}^3, \mathcal{E}) \arrow[d, "id\ \ S^{-1} = [id]_{\mathcal{E}}^{B_{\perp M}}"] \\
(B_{\perp M}, \mathbb{R}^3) \arrow[u, "S = [id]_{B_{\perp M}}^{\mathcal{E}}\ \ id"] \arrow[r] & (\mathbb{R}^3, B_{\perp M})
\end{tikzcd}$$

diagramma commutativo

$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & 0 & \frac{1}{\sqrt2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix}$

coordinate dei vettori della base $B_{\perp M}$ espresse nella base $\mathcal{E}$

Essendo le basi ortonormali la matrice S è ortogonale

→ $S^{-1} = S^T$

→ $S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & 0 & \frac{1}{\sqrt2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix} = S^T$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & 0 & \frac{1}{\sqrt2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & 0 & \frac{1}{\sqrt2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix}$$

→ potevamo determinare l'angolo da quest' uguaglianza.

~~$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ La studio come prima.~~

~~$[T]_e = A = [T]_e$ Essendo la matrice ortogonale è associata ad un operatore isometrico.~~

~~Essendo $\det(A) = -1 \Rightarrow [T]_{B_{1n}}$ è $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$~~

~~Sono le uniche possibilità perché essendo A simmetrica è riducibile a diagonale~~

~~$Tr\, A = Tr\, [T]_{B_{1n}}$~~

~~$\rightarrow [T]_{B_{1n}} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$~~

ESEMPIO 1)

Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$[T]_e = A$ Essendo la matrice ortogonale, ad essa è associato un operatore isometrico.

Essendo $\det(A) = -1$, È SIMILE AD UNA delle tre matrici che comprendono uno specchiamento.

Essendo A simmetrica la possiamo ridurre a una matrice diagonale → escludiamo la matrice che comprende anche una rotazione

$\Rightarrow [T]_{B_{1n}}$ è $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ oppure $\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$

Dovendo essere $Tr(A) = Tr([T]_{B_{1n}}) = 1$

$$\rightarrow \boxed{[T]_{B_{1n}} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}}$$

$[T]_{B_{1n}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Specchiamento rispetto al piano E_1 definito dall'autovalore $+1$

È così perché dalla matrice si ha
$T(V_1) = V_1$, $T(V_2) = V_2$, $T(V_3) = -V_3$
~~ovvero~~ il terzo vettore viene ribaltato mentre il piano definito dai primi 2 vettori rimane invariato (il piano è E_1).

~~[illegible]~~

- Se la matrice non fosse stata simmetrica $\Rightarrow$

$[T]_{B_{1n}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ sarebbe la

specchiamento rispetto al piano di rotazione

* | piano di rotazione e piano di specchiamento coincidono)

Trovando E_{-1} troviamo l'asse di rotazione ecc... E DI CONSEGUENZA OGNI ALTRA CARATTERISTICA DELLA ROTAZIONE

VEDIAMO PERCHÉ IL VERSO DELLA ROTAZIONE DIPENDE DAL SEGNO DEL DETERMINANTE DELLA MATRICE DATA:

Nell'insieme delle basi di uno spazio vettoriale V si definisce una relazione: $\forall$ coppia di basi esiste una trasformazione lineare che manda la prima base nella seconda. Il determinante di questa trasformazione (che è un isomorfismo) è $\neq 0$ (esso tale è il determinante della matrice associata nelle due basi)

Due basi si dicono in relazione $\Leftrightarrow$ il determinante della trasformazione è > 0. Tale relazione è di equivalenza.

L'insieme delle basi è allora diviso in due classi. A priori non c'è modo di identificare gli elementi di una classe come positivi o negativi. L'orientazione dello spazio V consiste proprio nella scelta arbitraria di una classe come positiva: le scelte possibili sono 2 quindi V ha due possibili orientazioni.

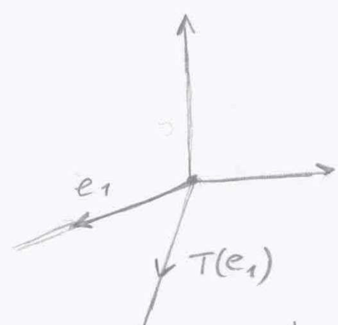
Se in uno spazio euclideo una base $\mathcal{B} = \{v_1 - v_n\}$ è considerata positiva $\Leftrightarrow$ $\det([v_1], \dots [v_n]) > 0$. Così la base e^n è positiva. Così una rotazione manda una base positiva in un'altra positiva, se il suo determinante è maggiore di zero.

ESERCIZIO

Studiare la trasformazione isometrica definita dalla matrice $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Sappiamo che le matrici simmetriche sono diagonalizzabili ortogonalmente, quindi sapendo che $\det A = -1$ e $\operatorname{Tr} A = 1 \Rightarrow$ gli autovalori della matrice A sono $1, 1, -1$ quindi la matrice diagonale simile ad A sarà

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$



La matrice A ci dice che $T(e_3) = e_3$ mentre $T(e_1) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ che quindi rimane nel piano $z = 0$ e così $T(e_2) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ rimane nel piano $z = 0$ che quindi è un piano $\perp$ al piano di riflessione

Considero il vettore $v = e_1 + T(e_1)$

$$T(e_1 + T(e_1)) = T(e_1) + T(T(e_1)) = T(e_1) + T^2(e_1)$$

$T^2 =$ identità : infatti $A \cdot A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}^{-1} & \sqrt{2}^{-1} & 0 \\ \sqrt{2}^{-1} & -\sqrt{2}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2}^{-1} & \sqrt{2}^{-1} & 0 \\ \sqrt{2}^{-1} & -\sqrt{2}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow T(e_1) + T^2(e_1) = T(e_1) + e_1$$

$\Rightarrow v = e_1 + T(e_1)$ è un autovettore di autovalore 1 $\Rightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2}^{-1} \\ \sqrt{2}^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

e così $e_2 + T(e_2) \Rightarrow T(e_2 + T(e_2)) = T(e_2) + e_2$

In generale preso $v \neq 0 \Rightarrow v + T(v)$ è autovettore di autovalore 1

$\Rightarrow E(1) = \{ v + T(v) \mid \forall v \in \mathbb{R}^3 \}$: Se $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Rightarrow v + T(v) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\alpha + \frac{\beta}{\sqrt{2}} \\ \frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\beta \\ 2\gamma \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ prendiamo due tali vettori l.i. e determiniamo $E(1)$

Possiamo anche trovarlo usando $\lambda = 1$ nella matrice A :

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (1-\sqrt{2})x + y = 0 \\ x - (1+\sqrt{2})y = 0 \end{cases}$$

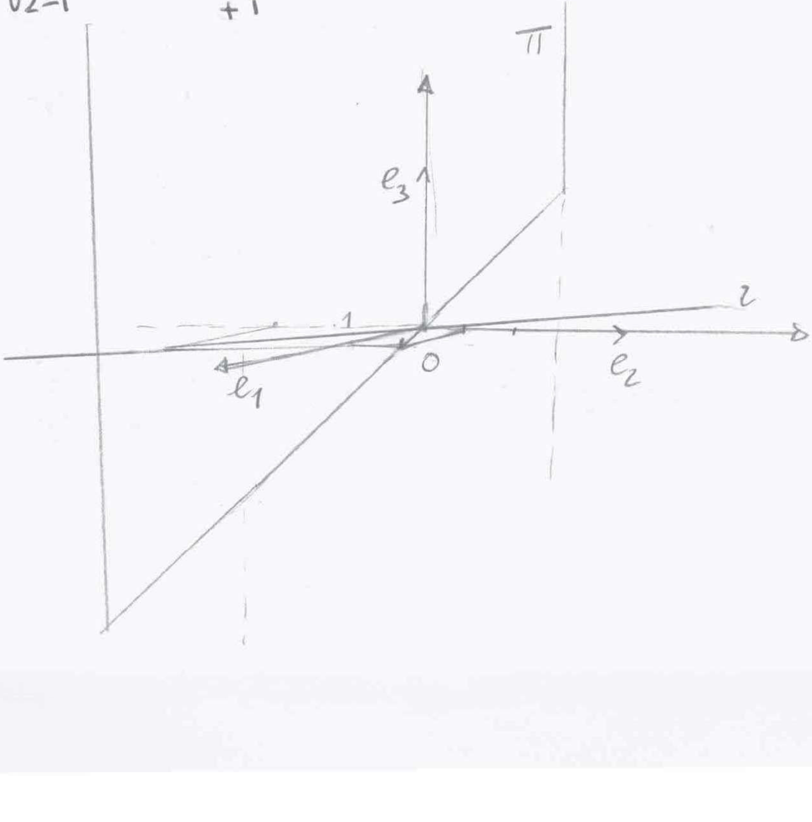
$\Rightarrow E(1) = : \quad y = (\sqrt{2}-1)x$ è il piano di riflessione π

$E(-1)$ sarà una retta $\perp$ a tale piano

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (1+\sqrt{2})x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{ retta } r$$

Vediamo se sono $\perp$: $\begin{cases} x = t \\ y = -(1+\sqrt{2})t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow$ ~~[illegible]~~

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{+(1+\sqrt{2})}{+1}$ ok sono $\perp$



- Definizione: Definiamo l'operatore T simmetrico, $T: (\mathbb{R}^n, \text{euclideo}) \longmapsto (\mathbb{R}^n, \text{euclideo})$, se vale

$$T(u) \cdot v = u \cdot T(v) \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n$$

- È autoaggiunto (l'aggiunto di se stesso).
- Diamo una base $\perp n$ in $\mathbb{R}^n$, $B_{\perp n} = \{v_1, \dots, v_n\}$

$\Rightarrow$ Considero $[v]_{B_{\perp n}} = X$, $[u]_{B_{\perp n}} = Y \Rightarrow$ se A è $[T]_{B_{\perp n}}$

$$[T(u)]_{B_{\perp n}} = AY \quad \text{e} \quad [T(v)]_{B_{\perp n}} = AX \Rightarrow$$

- $T(u) \cdot v = (AY)^T \begin{pmatrix} \text{matrice} \\ \text{del prodotto} \\ \text{scalare} \end{pmatrix} X = (AY)^T I X =$

$= Y^T A^T X$

- $u \cdot T(v) = Y^T I A X = Y^T A X = Y^T A^T X$

$\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow [T]_{B_{\perp n}}$ è simmetrica

Proposizioni: 1) Autovettori di un operatore simmetrico relativi ad autovalori diversi sono ortogonali

2) Se U è un sottospazio invariante per un operatore simmetrico, anche $U^\perp$ lo è.