30/10/2018

Prodotto scalare tra vettori di $\mathbb{R}^n$:

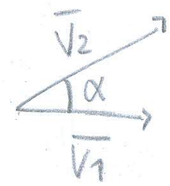
dati $V_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e $V_2 \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ $\Rightarrow V_1 \cdot V_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \in \mathbb{R}$

scalare

Esempio $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ -2 \end{pmatrix}$

$$V_1 \cdot V_2 = -1 + 2\sqrt{2} - 6 = -7 + 2\sqrt{2}$$

oppure $V_1 = (1 \;\; 2 \;\; 3)_{1\times 3}$ $V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ -2 \end{pmatrix}_{3\times 1}$



$V_1 \cdot V_2 = |V_1||V_2| \cos\alpha$

Prodotto vettoriale tra vettori di $\mathbb{R}^3$, V_1 e $V_2 \in \mathbb{R}^3$

↳ si riferisce solo a vettori tridimensionale NELLO SPAZIO

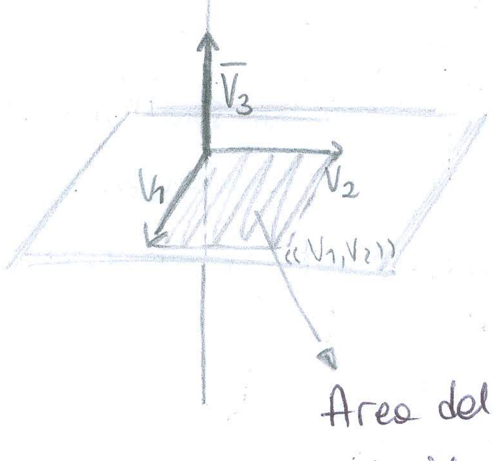
SOLO 3D

$\bar{V}_1 \times \bar{V}_2 = \bar{V}_3$

↳ vettore

V_3 è un vettore della retta perpendicolare al piano generato da V_1 e V_2

$\langle\langle V_1, V_2 \rangle\rangle$



Verso V_3

↳ regola vite destrorsa

Area del parallelogramma coincide con il MODULO di V_3

Posto $V_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ e $V_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $V_1 \times V_2$ ha per COORDINATE i minori di ordine 2 della matrice

⟶

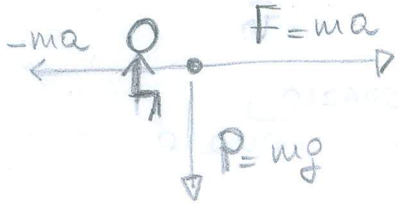
$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

quindi $V_3 = \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right)$

COORDINATE di V_3 → MINORI della MATRICE $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_1 & y_3 \end{pmatrix}$

considerando anche i versori $\hat{i}\,\hat{j}\,\hat{k}$ degli assi cartesiani:

$$V_3 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$



azione-reazione

quale è la forza che tiene schiacciato l'uomo sul sedile?

→ LA RISULTANTE TRA LE FORZE AGENTI SUL PASSEGGERO

$$\bar{R} = -\bar{F} + \bar{P}$$

PARLIAMO DI VETTORI perché TUTTE LE SOLUZIONI SONO VETTORI

└ di un sistema

Spazio delle soluzioni

↳ insieme dei vettori soluzioni

<u>Definizione</u>: un insieme V è detto SPAZIO VETTORIALE SUL CAMPO K se sono date 2 operazioni su V:

continuo la def.

1) SOMMA "+" $V \times V \to V$

$$(v_1, v_2) \to v_1 + v_2$$

2) MOLTIPLICAZIONE per uno SCALARE "$\cdot \alpha$" : $K \times V \to V$

$$(\alpha, v) \to \alpha v$$

e tali operazioni devono verificare le seguenti PROPRIETÀ:

→ 1) la somma deve essere ASSOCIATIVA, COMMUTATIVA, deve esistere il ELEMENTO NEUTRO e l'OPPOSTO di ogni ELEMENTO

→ 2) la moltiplicazione per uno scalare deve essere ASSOCIATIVA, deve esistere l'ELEM. NEUTRO, deve valere la proprietà DISTRIBUTIVA del prodotto rispetto a somma

<u>Esempio</u> $V = \mathbb{R}$ insieme dei numeri REALI

vale sia la 1) sia la 2) $\Rightarrow$ $\mathbb{R}$ È UNO SPAZIO VETTORIALE SU SE STESSO

<u>Esempio</u> $V = \mathbb{R}^2$

diamo la somma su $\mathbb{R}^2$ ("simbolo $\hat{+}$") : $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_2 + y_2 \end{pmatrix}$$

binaria interna !

valgono ~~...~~ le proprietà?

<u>ASSOCIATIVA</u> $(v_1 \hat{+} v_2) \hat{+} v_3 = v_1 \hat{+} (v_2 \hat{+} v_3) \quad \forall v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} (x_1 + y_1) + z_1 \\ (x_2 + y_2) + z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + (y_1 + z_1) \\ x_2 + (y_2 + z_2) \end{pmatrix}$$

<u>VERO</u> perchè somma tra reali gode dell'associativa

a dimostrare ~~...~~ il resto delle proprietà (PER CASA)

CONTINUO ESEMPIO $V = \mathbb{R}^2$

→ ORA si definisce il prodotto "$\hat{\cdot}$" $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
per uno scalare $(\alpha, v) \longmapsto \alpha . v$

bisogna dimostrare la validità di tutte le proprietà richieste

proprietà ASSOCIATIVA : SI DIMOSTRA CHE $(\alpha\beta)\hat{\cdot} v = \alpha \hat{\cdot} (\beta v)$

(DIMOSTRARE PER CASA)

$\Longrightarrow$ $\mathbb{R}^2$ È UNO SPAZIO VETTORIALE

così come $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4, \dots, \mathbb{R}^n$.

anche $M_{p \times n}(\mathbb{R})$ è SPAZIO VETTORIALE

---

dimostriamo che è uno spazio vettoriale il seguente insieme:

$V = \mathbb{R}_2[x] = \{$polinomi in una variabile al massimo di grado 2$\}$

- Somma "$\hat{+}$" ~~tra~~ $\mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$

$(a_2x^2 + a_1x + a_0 , b_2x^2 + b_1x + b_0) \mapsto (a_2+b_2)x^2 + (a_1+b_1)x + a_0+b_0$

somma tra polinomi → somma tra monomi simili

VERIFICATE LE PROPRIETÀ

- prodotto "$\hat{\cdot}$" per uno scalare $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$

$(\alpha , a_2x^2 + a_1x + a_0) \longmapsto \alpha a_2x^2 + \alpha a_1 x + \alpha . a_0$

VERIFICATE LE PROPRIETÀ

$V = \mathcal{C}^0_{[0,1]} = \{ f\ [0,1] \to \mathbb{R} , \text{continua} \}$ è spazio vettoriale

- somma di funzioni $f \hat{+} g$ $\quad \mathcal{C}^0_{[0,1]} \times \mathcal{C}^0_{[0,1]} \longrightarrow \mathcal{C}^0_{[0,1]}$ $\quad f \hat{+} g : [0,1] \to \mathbb{R}$

È UN'OPERAZIONE INTERNA PERCHÉ $\quad (f, g) \longmapsto (f \hat{+} g)$; $(f \hat{+} g)(x) = f(x) + g(x)$

somma di funzioni continue è una funzione continua

$$\bullet \quad \alpha \circ f \; : \; \begin{aligned} [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \alpha(f(x)) \end{aligned}$$

da dimostrare tutte le proprietà