

Abbiamo dimostrato che data una forma bil. simmetrica
 $F: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ \exists sempre una base B tale che $[F]_B$ è
diagonale e quindi anche $[Q]_B$ è diagonale \Rightarrow in quella
base $Q(X) = X^T [Q]_B X = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \dots + \alpha_n x_n^2$
Questo si chiama FORMA CANONICA delle forme quadratiche.

Vediamo un metodo (di GAUSS) per la riduzione
dell'equazione di una quadrica in forma canonica.

Si riduce l'equazione a somme algebriche di quadrati.

Sfruttando le identità algebriche $x^2 + 2axy = (x+ay)^2 - a^2y^2$

e $4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2$

Si fa per induzione sul numero delle variabili, n .

1) $n=1$ ovvio

2) sia fino a $Q(x_1, \dots, x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} d_i x_i^2$; consideriamo

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} a_{ii} x_i^2 + \sum a_{ij} x_i x_j$$

il supponiamo che $\exists a_{ii} \neq 0$ per qualche i , supponiamo per $i=1$

$$\Rightarrow \text{scriviamo } Q(x) = a_{11} x_1^2 + R(x_2, \dots, x_n) x_1 + S(x_2, \dots, x_n)$$

con R forma lineare ed S forma quadratiche \Rightarrow

$$Q(x) = a_{11} \left(x_1 + \frac{R}{2a_{11}} \right)^2 - \frac{R^2}{4a_{11}} + S \Rightarrow \text{facciamo un cambiamento}$$

di coordinate $\begin{cases} y_1 = x_1 + \frac{R}{2a_{11}} \\ y_2 = x_2 \\ \vdots \\ y_n = x_n \end{cases} \Rightarrow Q(y) = a_{11} y_1^2 + S'(y_2, \dots, y_n)$

con $S'(y_2, \dots, y_n) =$ somma di quadrati, per ipotesi induttiva

ii) Supponiamo che non compaiono x_i^2 né x_j^2 , ma $x_i x_j$, ad esempio $x_1 x_2 \Rightarrow Q(x) = a_{12} x_1 x_2 + R(x_3, \dots, x_n) x_1 + S(x_3, \dots, x_n) x_2 + T(x_3, \dots, x_n)$ con R, S forme lineari, T forma quadratiche

$$\Rightarrow Q(x) = a_{12} \left(x_1 + \frac{S}{a_{12}} \right) \left(x_2 + \frac{R}{a_{12}} \right) + T - \frac{RS}{a_{12}} \Rightarrow \text{facciamo il}$$

cambiamento di coordinate $\begin{cases} y_1 = x_1 + \frac{S}{a_{12}} \\ y_2 = x_2 + \frac{R}{a_{12}} \\ y_3 = x_3 \\ \vdots \\ y_n = x_n \end{cases} \Rightarrow Q(y) = a_{12} y_1 y_2 +$

$$+ T - \frac{RS}{a_{12}} \Rightarrow$$

$$Q(y) = a_{12} \frac{(y_1 + y_2)^2 - (y_1 - y_2)^2}{4} + T - \frac{RS}{a_{12}} \Rightarrow \text{pongo}$$

$$\Rightarrow Q(z) = \frac{a_{12}}{4} z_1^2 - \frac{a_{12}}{4} z_2^2 + T - \frac{RS}{a_{12}}$$

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_2 \\ z_2 = y_1 - y_2 \\ z_3 = y_3 \\ \vdots \\ z_n = y_n \end{cases}$$

$T - \frac{RS}{a_{12}}$ per ipotesi induttiva si può scrivere come somma di quadrati c.v.d.

ESERCIZIO : Dato $Q(x) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + x_3^2$

ridurre a forme canoniche e descrivere tale forma quadratiche

Supponiamo di prendere in \mathbb{R}^3 le basi canoniche

$$\Rightarrow [Q]_e = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Riduciamola a forme canoniche con il metodo di Gauss

$$x_1^2 + 2x_1(-2x_2 + x_3) + 4x_2^2 + x_3^2$$

$$= [x_1 + (-2x_2 + x_3)]^2 - (-2x_2 + x_3)^2 + 4x_2^2 + x_3^2$$

$$= [x_1 - 2x_2 + x_3]^2 - \cancel{4x_2^2} + 4x_2x_3 - \cancel{x_3^2} + \cancel{4x_2^2} + \cancel{x_3^2}$$

$$= [x_1 - 2x_2 + x_3]^2 + 4x_2x_3$$

Un primo cambiamento di coordinate \bar{e} :
$$\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow = y_1^2 + 4y_2y_3$$

$$= y_1^2 + (y_2 + y_3)^2 - (y_2 - y_3)^2$$

Un secondo cambiamento di coordinate \bar{e}
$$\begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = y_2 + y_3 \\ z_3 = y_2 - y_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow = \boxed{z_1^2 + z_2^2 - z_3^2}$$

La forma quadratiche \bar{e} non degenera, indefinita
la sua segnatura \bar{e} $(2, 1)$

Abbiamo effettuato un cambiamento di coordinate dato dalla composizione dei due $\Rightarrow = \begin{cases} z_1 = x_1 - 2x_2 + x_3 \\ z_2 = x_2 + x_3 \\ z_3 = x_2 - x_3 \end{cases}$

Abbiamo cioè cambiato la base dello spazio ed
in questa nuova base B si ha: $[Q]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

La nuova base B è F_Q -ortogonale, dove F_Q è
la forma bilineare polare di Q .

Vogliamo determinare tale base B di \mathbb{R}^3 . Le coordinate
dei vettori di tale base saranno le colonne della
matrice che dà il cambiamento di base nel passaggio
dalla base B alla base E ; cioè esprimendo
 (x_1, x_2, x_3) le coordinate di \mathbb{R}^3 riferite alla base E
e (z_1, z_2, z_3) le coordinate di \mathbb{R}^3 riferite alla base B ,

$$\text{avremo } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = [id]_{B}^E \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Abbiamo determinato } \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

la matrice cercata è l'inversa di quella che abbiamo
 \Rightarrow o la troviamo così $(A | I) \sim (I | A^{-1})$

$$\text{oppure troviamo } \begin{cases} x_1 = z_1 + \frac{z_2}{2} + \frac{3}{2}z_3 \\ x_2 = \frac{z_2 + z_3}{2} \\ x_3 = \frac{z_2 - z_3}{2} \end{cases} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B = \left\{ (1, 0, 0); \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right); \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \right\}$$

Tale matrice A^{-1} è proprio la matrice S
tale che $S^T [Q]_E S = [Q]_B$!