1 ottobre 2014

L'insieme delle matrici $\mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$ con l'operazione di addizione è un gruppo commutativo.

Definiamo in $\mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$ l'operazione di MOLTIPLICAZIONE PER UNO SCALARE:

$$\cdot\alpha : \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$$

$$(A, \alpha) \longmapsto \alpha A$$

cioè posto $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,n}} \Rightarrow \alpha A = (\alpha a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,n}}$

esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $\alpha = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} & 5\sqrt{2} & 6\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Proprietà

- associativa: prendo due scalari $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
- l'elemento neutro è 1; $\exists$ elemento neutro $\alpha = 1$.
- $\exists$ proprietà distributiva (distributiva può esistere quando ho più operazioni) del prodotto per uno scalare rispetto all'addizione tra matrici:

$$\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall A, B \in \mathcal{M}_{p\times n}$$

per verificare l'uguaglianza devo controllare $\forall$ le entrate corrispondenti: DEVONO ESSERE UGUALI.

- $\exists$ proprietà commutativa $\alpha A = A\alpha \qquad \forall A \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

MOLTIPLICAZIONE TRA MATRICI

Moltiplicare entrata per entrata non porta a nessuna proprietà, cioè non definisco una nuova struttura algebrica.

Prodotto tra matrici (prodotto riga × colonna)

Def: siano A una matrice $A \in \mathcal{M}_{p \times n}$ e $B \in \mathcal{M}_{q \times m}$

con $A = (a_{st})_{\substack{s=1,\dots,p \\ t=1,\dots,n}}$ e $B = (b_{hk})_{\substack{h=1,\dots,q \\ k=1,\dots,m}}$

$\Rightarrow$ definisco $C = A \cdot B$ in questo modo: se $C = (c_{ij})$

$$\Rightarrow \quad c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj} \qquad \forall i = 1,\dots,p \quad \forall j = 1,\dots,m$$

(fisso la i-esima riga di A la j-esima colonna di B) PER POTER COSTRUIRE c_{ij}, OCCORRE CHE $\boxed{n = q}$ CIOÈ IL # DI colonne di A deve coincidere con IL # DI righe di B !!!

esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A \in \mathcal{M}_{3 \times 2}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad B \in \mathcal{M}_{2 \times 4}$$

$$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = 1$$

$$c_{11} = \sum_{l=1}^{2} a_{1l} \cdot b_{l1}$$

$$c_{12} = \sum_{l=1}^{2} a_{1l} \cdot b_{l2} = a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} = 1 \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot 2 = 4 + \sqrt{2}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 4+\sqrt{2} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{pmatrix}$$

La matrice risultante è $\mathcal{M}_{3\times 4}$: ha 3 righe come aveva A, e 4 colonne come aveva B.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 4+\sqrt{2} & -1 & 2 \\ -4 & 3\sqrt{2}-2 & 11 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

QUINDI IN GENERALE TALE MOLTIPLICAZIONE TRA MATRICI È UN OPERAZIONE COSÌ DEFINITA :

$$\boxed{\begin{aligned} \cdot \; \mathcal{M}_{p\times n} \times \mathcal{M}_{n\times q} &\longrightarrow \mathcal{M}_{p\times q} \\ \left((a_{st})_{p\times n}, (b_{\ell k})_{n\times q} \right) &\longmapsto \left(\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} b_{\ell j} \right)_{p\times q} \end{aligned}}$$

COSÌ NELL'ESEMPIO: $\mathcal{M}_{3\times 2} \times \mathcal{M}_{2\times 4} \longrightarrow \mathcal{M}_{3\times 4}$.

Se prendo una matrice quadrata rimango nello stesso insieme, E QUINDI ho ancora un'operazione binaria interna.

$$\mathcal{M}_{k\times k} \times \mathcal{M}_{k\times k} \longrightarrow \mathcal{M}_{k\times k}$$

esempio $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$

Se $A \cdot B$ è definita IN $\mathcal{M}_{3\times 2} \times \mathcal{M}_{2\times 4} \xrightarrow{\text{CON RISULTATO IN}} \mathcal{M}_{3\times 4} \Rightarrow$

$B \cdot A$ sarebbe definito in $\mathcal{M}_{2\times 4} \times \mathcal{M}_{3\times 4}$ dove non è possibile. QUINDI L'ESISTENZA DI $A \cdot B$ NON GARANTISCE L'ESISTENZA DI $B \cdot A$!

Inoltre anche con matrici quadrate (POSSO) non ottenere lo stesso risultato!! AD ESEMPIO:

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}} \underset{B}{\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}} = \underset{C}{\begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}}; \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 5+18 & \cdot & \cdot \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \Rightarrow D \neq C$$

Il prodotto riga per colonna definito in $M_{K\times K}$ è associativo : $(A\cdot B)C = A(BC) \quad \forall A,B,C \in M_{K\times K}$

(da verificare)

Esiste un elemento neutro ?

Comincio con un esempio numerico.

In 1×1 l'elemento neutro è 1. Ora vado avanti con $M_{2\times 2}$.

esempio: Data $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ cerco $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ tale che

$A\cdot B = A$ ed anche $B\cdot A = A$ (se così non fosse l'elemento si chiamerebbe elemento neutro detro, o elemento neutro sinistro E NON SAREBBE UNICO!, PROPRIETÀ NECESSARIA PER DEFINIRE L'ELEMENTO NEUTRO.

$$AB = \begin{pmatrix} x+2z & y+2w \\ 3x+4z & 3y+4w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Queste matrici sono uguali se hanno lo stesso ordine e poi le entrate corrispondenti devono corrispondere.

Per verificare questo imposto un sistema scalare

$$\begin{cases} x+2z = 1 \\ y+2w = 2 \\ 3x+4z = 3 \\ 3y+4w = 4 \end{cases}$$

Bisogna poi risolvere anche $B\cdot A = A$.

Una volta risolti i sistemi trovo che $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ w = 1 \end{cases}$

Esiste la matrice elemento neutro:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$ matrice Identità (o m. unità)

ed è l'elemento neutro per la moltiplicazione riga × colonna.

In $\mathcal{M}_{n \times n}$ $\exists$ elemento neutro $I = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$

Queste OPERAZIONE non è commutativa, non abbiamo un gruppo perché non esiste il reciproco DI OGNI ELEMENTO.

INFATTI: Data $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ $\exists B \in \mathcal{M}_{n \times n} \mid A \cdot B = I$?

la risposta è "non sempre": dipende da A. Se il determinante $\neq 0$, allora la matrice è invertibile, e moltiplicata per TALE B mi dà I.

$A \cdot B = I$? e $BA = I$?

deve essere vero per entrambe.

Quindi dipende dal rango di A. L'ESISTENZA DEL SUO RECIPROCO.

Conclusione: queste nuove operazione (m. riga × colonna) non possiamo farla sempre e non DEFINISCE UN gruppo (non abbiamo il reciproco per tutti gli elementi).

Matrici applicate alla risoluzione di Sistemi

Sia Σ un sistema lineare di p equazioni in n variabili

$$\Sigma = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

Per la risoluzione uso solo i coefficienti. (QUINDI COSTRUISCO) una matrice che avrà "p" righe e "$n+1$" colonne.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & & \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} & b_p \end{pmatrix}_{p\times(n+1)}$$

matrice associata a sistema lineare non omogeneo.

DALLA MATRICE SI PUÒ RICOSTRUIRE IL SISTEMA:

esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \Sigma = \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 4x_1 + 5x_2 = 6 \end{cases}$

POSSIAMO COSTRUIRE DUE MATRICI: UNA MATRICE in $M_{p\times n}$ FORMATA DAI COEFFICIENTI DELLE VARIABILI DEL SISTEMA (MATRICE DEI COEFFICIENTI O MATRICE INCOMPLETA)

ALLA matrice dei coef. viene associata una <u>matrice completa</u> che ha in più la colonna dei Termini noti.

mentre la matrice dei coef. $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix}_{p\times n}$ è detta matrice incompleta

Posto $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & & a_{pn} \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ => la matrice completa si indica con

$$(A \,\vdots\, B)$$

Posso scrivere in forma matriciale il sistema.

Σ in forma matriciale è dato ~~da~~ in questo modo: posto A la matrice dei coef., B il vettore colonna dei termini noti e $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ il vettore colonne delle incognite, => Σ è dato anche come $AX = B$

Ora possiamo applicare il metodo di Gauss alla matrice, alla fine avrò una matrice diagonale.

DEFINIZIONE

Il numero di Pivots NELLA MATRICE RIDOTTA A GRADINI mi dà il RANGO della matrice.