SIA V UNO SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{R}$ => UNA SUA BASE È UN INSIEME DI VETTORI DI V CHE SIANO GENERATORI DI V, LINEARMENTE INDIPENDENTI $\mathcal{B}_V$

ESEMPI:

① in $\mathbb{R}^3$ $\mathcal{B}_V = \{\underbrace{(1,1,1)}_{v_1}, \underbrace{(-1,2,0)}_{v_2}, \underbrace{(3,0,-1)}_{v_3}\}$ È BASE DI $\mathbb{R}^3$?

1.i sono linearmente indipendenti?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(A) = ?$$

$|A| = -1 + 2 \cdot (-4) \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3 \Rightarrow$ I VETTORI SONO linearmente indipendenti.

1.ii sono generatori?

Dato UN VETTORE QUALUNQUE VETTORE DI $\mathbb{R}^3$ $v = (x, y, z)$

$\exists\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \mid v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$?

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ \alpha_1 - \alpha_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 \\ y = \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ z = \alpha_1 - \alpha_3 \end{cases}$$

$$rg \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = rg \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & x \\ 1 & 2 & 0 & y \\ 1 & 0 & -1 & z \end{array}\right)$$

// CON QUESTA OPERAZIONE CI ACCERTIAMO CHE IL SISTEMA HA SOLUZIONI ~~...~~ EGUAGLIANDO I RANGHI PER ROUCHÉ-CAPELLI

QUESTA HA RANGO 3

POICHÉ QUESTA MATRICE CONTIENE L'ALTRA COME SOTTOMATRICE, IL rg NON PUÒ ESSERE MINORE DI 3, MA NON PUÒ ESSERE > 3 PER VIA DEI MINORI CHE HANNO AL MASSIMO ORDINE 3.

$3 = 3$ ✓ IL SISTEMA HA SOL $\{\ldots\}$ $\exists$! $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ I TRE VETTORI GENERANO $\mathbb{R}^3$

$\mathcal{B}\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ È LA BASE CANONICA DI $\mathbb{R}^3$.

IN OGNI $\mathbb{R}^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists$ UNA BASE CANONICA $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}$ $(\mathcal{E}_{\mathbb{R}^n})$, $\mathcal{E}_{\mathbb{R}^n} =$ al

$= \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}_{n}$ DIMOSTRARE CHE È BASE DI $\mathbb{R}^n$!

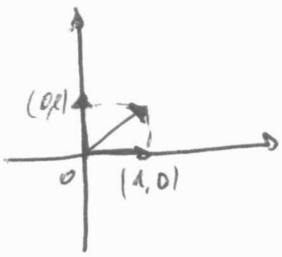
ESSENDO LA MATRICE IDENTITÀ n RANGO N È QUINDI n VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI.

$$\left(I_{m \times m} \ \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{matrix} \right) \Rightarrow$$ IL RANGO È ANCORA n $\Rightarrow$ SONO GENERATORI

NELLO SPAZIO VETTORIALE V, $\exists$ ∞ BASI QUINDI PER IL NOSTRO SPAZIO VETTORIALE $\mathbb{R}^n$ SI POSSONO DETERMINARE INFINITE ENNUPLE DI VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI

QUESTE INFINITE BASI HANNO TUTTE LA STESSA CARDINALITÀ. TALE CARDINALITÀ È DETTA DIMENSIONE DI V.

DATO UNO SPAZIO $\mathbb{R}^n$, QUINDI, SONO NECESSARI n VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI PER DETERMINARNE UNA BASE.



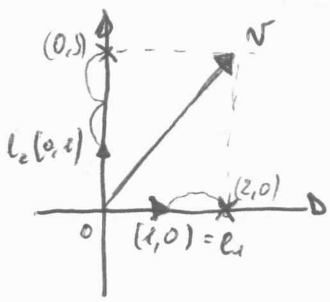
IL SISTEMA DI RIFERIMENTO TRACCIATO RAPPRESENTA I VETTORI DI BASE $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, VETTORI DELLA BASE CANONICA DEL PIANO.

LE COORDINATE DI UN VETTORE SONO I COEFFICIENTI DELLA COMBINAZIONE LINEARE DI QUEL VETTORE NELLA BASE DATA.

SE PRENDO IL VETTORE $\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

LUNGHEZZA $= \left[\sqrt{1+0+0} = 1 \right.$ VERSORE $\left. \right]$

$$v = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$



PROPOSIZIONE: IN V SP. VETT. n-DIMENSIONALE SIA $\mathcal{B}_V$ UNA BASE $\mathcal{B}_V = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$

OGNI VETTORE DI V SI SCRIVE IN MODO UNICO COME COMBINAZIONE LINEARE DEI VETTORI DELLA BASE $\mathcal{B}_V$

DIMOSTRAZIONE: PER ASSURDO

SUPPONGO CHE UN VETTORE v SI SCRIVA COME 2 DIVERSE COMBINAZIONI LINEARI CIOÈ $v = a_1 v_1 + \dots a_n v_n$ E $v = b_1 v_1 + \dots b_n v_n$ CON $a_1, \dots a_n$ E $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n \Rightarrow a_1 v_1 - b_1 v_1 + \dots + a_n v_n - b_n v_n = 0$$

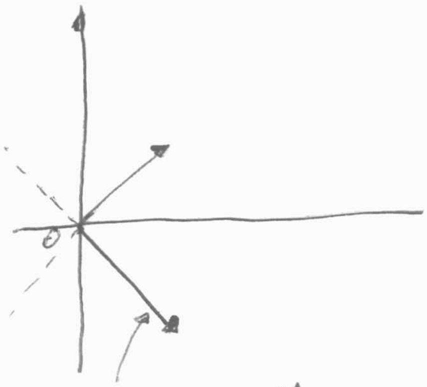
$(a_1 - b_1) v_1 + \dots + (a_n - b_n) v_n = 0$ ESSENDO $v_1 + \dots v_n$ LINEARMENTE INDIPENDENTI

$a_1 - b_1 = 0$ $\quad a_1 = b_1$ $\quad a_n = b_n$ $\quad$ c.v.d.

(2)

ESERCIZIO: DETERMINARE COORDINATE DEL VETTORE $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ NELLA BASE

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \right\}$$



NUOVO SISTEMA DI RIF DATO DALLA BASE

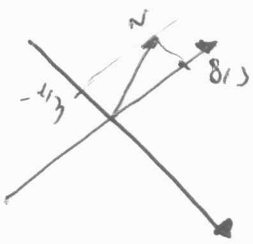
$$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

QUESTO SISTEMA HA SEMPRE SOLUZIONE DATO CHE CI SONO 2 VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI QUINDI IL $Rg(2)$ LO È SIA NELLA MATRICE DEI COEFFICIENTI SIA NELLA COMPLETA PER CUI IL RG NON PUÒ AUMENTARE

$$\xrightarrow{R_1 - R_2 \to R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{2R_2 + 3R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 8/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \end{array}\right)$$

IL VETTORE HA COORDINATE $\begin{pmatrix}8/3\\-1/3\end{pmatrix}$ NELLA BASE $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$



QUESTO VETTORE È LO STESSO CHE AVEVO NELLA BASE PRECEDENTE MA HA, OVVIAMENTE, COORDINATE DIVERSE POICHÉ IL SISTEMA DI RIFERIMENTO È CAMBIATO AVENDO ASSUNTO UNA BASE DIFFERENTE.

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2\\1 & -1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 1e_1 + 1e_2 \qquad \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = 2e_1 - 1e_2$$

$$A = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}} \qquad v = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = [v]_{\mathcal{C}} \qquad \begin{pmatrix}8/3\\-1/3\end{pmatrix} = [v]_{\mathcal{B}}$$

↳ SIGNIFICA PASSO DALLE COORDINATE IN BASE $\mathcal{E}$ ALLE COORDINATE IN BASE $\mathcal{B}$

$$[v]_{\mathcal{B}} = \tfrac{8}{3} v_1 - \tfrac{1}{3} v_2 \qquad \tfrac{8}{3}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 2\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8/3\\-1/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

$$\boxed{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} \cdot [v]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{C}}}$$ OPPURE $$\left(M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}\right)^{-1} = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$$ E $$\boxed{M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} \cdot [v]_{\mathcal{C}} = [v]_{\mathcal{B}}}$$