DEFINIZIONE :

Dati due spazi vettoriali V e W, un'applicazione $L: V \longrightarrow W$ è detta lineare se

$$L(V_1 + V_2) = L(V_1) + L(V_2) \quad \forall\, V_1, V_2 \in V$$

$$L(\alpha V) = \alpha L(V) \quad \forall\, v \in V \text{ e } \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

(oppure $L(\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2) = \alpha_1 L(V_1) + \alpha_2 L(V_2)$ $\forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ e $\forall\, v_1, v_2 \in V$)

Esempi: $L: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (ogni CAMPO è anche SPAZIO VETTORIALE su se stesso)

$x \longrightarrow x^2 + 2$ L è lineare?

1) $L(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2)^2 + 2$; $L(x_1) + L(x_2) = x_1^2 + 2 + x_2^2 + 2$

le due ESPRESSIONI SONO DIVERSE, QUINDI NON È LINEARE

$$L(x_1 + x_2) \neq L(x_1) + L(x_2)$$

Esempio : $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$V = (x, y) \longmapsto (x+y, 2x, xy)$ COORDINATE DEL VETTORE IMMAGINE

L ha 3 COMPONENTI : $L_1: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$; $L_2: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x, y) \longmapsto x + y$ $\quad (x, y) \longmapsto 2x$

$L_3\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x, y) \longrightarrow xy$

abbiamo quindi 3 APPLICAZIONI CHE SONO LE COMPONENTI DI L.

L è lineare?

1) $L(V_1 + V_2) \overset{?}{=} L(V_1) + L(V_2)$ $\quad V_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ e $V_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$V_1 + V_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$ $\quad L(V_1 + V_2) = \big((x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), 2(x_1 + x_2), (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)\big)$

②

$$L(v_1)+L(v_2) = (x_1+y_1,\ 2x_1,\ x_1y_1) + (x_2+y_2,\ 2x_2,\ x_2y_2) =$$

$$= (x_1+y_1+x_2+y_2,\ 2x_1+2x_2,\ x_1y_1+x_2y_2)$$

$L(v_1+v_2) \neq L(v_1)+L(v_2)$ poiché differiscono per la terza componente.

Quindi non è un'APPLICAZIONE LINEARE.

Le prime due componenti sono di primo grado in variabili x, y. Invece la terza è di secondo grado.

<u>Osservazione</u>: un'applicazione tra spazi vettoriali, espressa mediante le coordinate del dominio è lineare $\Longleftrightarrow$ le singole componenti sono date da <u>POLINOMI LINEARI</u> (di primo grado) <u>OMOGENEI</u>, nelle coordinate del dominio

Data $L: V \to W$ lineare $\Rightarrow$ possiamo considerare $\mathrm{Im}\,L$, che è un SOTTOINSIEME di W: $\mathrm{Im}\,L \subset W$

<u>Proposizione</u>: $\mathrm{Im}\,L$ è un SOTTOSPAZIO VETTORIALE di W

<u>Dimostrazione</u>: i) $L(0_V) = 0_W$: $0 = v - v \Rightarrow L(0) = L(v-v) =$ per la LINEARITÀ $L(v-v) = L(v) - L(v) = 0_W$ è appunto il VETTORE nullo

$0_W \in \mathrm{Im}\,L$, essendo $0_W = L(0_V)$.

ii) Siano $w_1, w_2 \in \mathrm{Im}\,L \Rightarrow \exists\, v_1, v_2 \in V$ tali che $L(v_1) = w_1$ e $L(v_2) = w_2 \Rightarrow w_1 + w_2 = L(v_1) + L(v_2) =$
$= L(v_1+v_2) \Rightarrow w_1 + w_2 \in \mathrm{Im}\,L$
per la linearità

iii) Preso $w = L(v)$ e $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha w = \alpha L(v) =$ (per la linearità di L) $= L(\alpha v) \Rightarrow \alpha w \in \mathrm{Im}\,L$

Definizione: Chiamo il NUCLEO o KERNEL di una APPLICAZIONE LINEARE $L: V \longrightarrow W$ il sottoinsieme di V così definito $Ker\, L = \{v \in V \mid L(v) = 0\}$ ossia la CONTROIMMAGINE in V del vettore nullo di W.

Proposizione: Il nucleo di un'applicazione lineare $L: V \longrightarrow W$ è un sottospazio vettoriale di V (DA DIMOSTRARE PER ESERCIZIO)

Proposizione: $L: V \longrightarrow W$ lineare, è iniettiva $\iff Ker\, L = \{0\}$
$(0_V \in Ker\, L)$

Dimostrazione "$\Longrightarrow$" L è iniettiva $\Rightarrow$ dati V_1 e $V_2 \in V$ e supposto $L(V_1) = L(V_2) \Longrightarrow V_1 = V_2$

$$\Downarrow$$

$$L(V_1) - L(V_2) = 0_W$$
$$\parallel$$
$$L(V_1 - V_2) = 0_W \quad \text{ma } V_1 - V_2 = 0_V$$

$$V_1 = V_2 : L(V_1) = L(V_2) \Rightarrow L(V_1) - L(V_2) = 0_W \Rightarrow$$
$$\Rightarrow L(V_1 - V_2) = 0_W \text{ ma } V_1 - V_2 = 0_V$$

"$\Longleftarrow$" $Ker\, L = \{0\}$, prendo V_1 e $V_2 \in V$ e suppongo

$$L(V_1) = L(V_2) \Rightarrow L(V_1) - L(V_2) = 0_W \Rightarrow$$
$$\Rightarrow L(V_1 - V_2) = 0_W \Rightarrow V_1 - V_2 \in Ker\, L \Rightarrow V_1 - V_2 = 0_V \Rightarrow$$
$$\Rightarrow V_1 = V_2 \Rightarrow L \text{ è iniettiva}$$

cvd

Osserviamo che, data $L: V \longrightarrow W$ lineare, $\dim Ker\, L \leq \dim V$ e $\dim Im\, L \leq \dim W$.

Proposizione: (TEOREMA DELLE DIMENSIONI) Data $L: V \longrightarrow W$ lineare

$$\Rightarrow \dim V = \dim Ker\, L + \dim Im\, L$$

Dimostrazione: Siano $n = \dim V$, $k = \dim \operatorname{Ker} L$,

$p = \dim \operatorname{Im} L$ ed $l = \dim W$

Sia $B_{\operatorname{Ker} L} = \{u_1, \dots, u_k\}$ base di $\operatorname{Ker} L$ e

$B_V = \{u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_{n-k}\}$ base di V,

$B_{\operatorname{Im} L} = \{w_1, \dots, w_p\}$ base di $\operatorname{Im} L$

Considero $w \in \operatorname{Im} L \Rightarrow w = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_p w_p$, ~~...~~ posto $w_j = L(t_j)$ $\forall j = 1, \dots, p$ con $t_j \in V \Rightarrow w = L(v) =$

$= \alpha_1 L(t_1) + \alpha_2 L(t_2) + \dots + \alpha_p L(t_p) \Rightarrow$

$\Rightarrow L(v) = L(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 + \dots + \alpha_p t_p)$

$L(v) - L(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 + \dots + \alpha_p t_p) = 0_W$

$L(\underbrace{v - \alpha_1 t_1 - \alpha_2 t_2 - \dots - \alpha_p t_p}_{\in \operatorname{Ker} L}) = 0_W \Rightarrow v - \alpha_1 t_1 - \dots - \alpha_p t_p =$

$= \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \dots + \beta_k u_k \Rightarrow$

$\Rightarrow v = \alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 + \dots + \alpha_p t_p + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_k u_k$

$\Rightarrow t_1, \dots, t_p, u_1, \dots, u_k$ sono generatori di V: essi sono

$p + k = \dim \operatorname{Im} L + \dim \operatorname{Ker} L$

Mostriamo che $t_1, \dots, t_p, u_1, \dots, u_k$ sono LINEARMENTE INDIPENDENTI $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Considero (*) $a_1 t_1 + a_2 t_2 + \dots + a_p t_p + b_1 u_1 + \dots + b_k u_k = 0_V \Rightarrow$

$\Rightarrow L(a_1 t_1 + \dots + b_k u_k) = L(0_V) = a_1 \overset{w_1}{L(t_1)} + \dots + a_p \overset{w_p}{L(t_p)} +$

$+ b_1 \underset{0_W}{\underset{\parallel}{L(u_1)}} + \dots + b_k \underset{0_W}{\underset{\parallel}{L(u_k)}} = 0_W$

$\Rightarrow e_1 w_1 + \dots + e_p w_p = 0_W \Rightarrow e_1 = e_2 = \dots = e_p = 0$

POICHE' $B_{Im L} = \{w_1, \dots, w_p\}$ $\Rightarrow$ SOSTITUENDO IN ⊛

$\Rightarrow$ rimane $b_1 u_1 + \dots + b_k u_k = 0_V$ ma $\{u_1, \dots, u_k\} = B_{Ker L}$

$\Rightarrow b_1 = b_2 = \dots = b_k = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t_1, \dots, t_p, u_1, \dots, u_k$ sono LINEARMENTE INDIPENDENTI $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dim V = \dim Ker L + \dim Im L$ c.v.d.

$L : V \to W$ lineare:

BIETTIVA $\Rightarrow$ $Ker L = \{0\}$ e $Im L \equiv W$

Quindi si possono avere applicazioni lineari biettive solo fra spazi con le medesime dimensioni.

ISOMORFISMI TRA SPAZI VETTORIALI SONO POSSIBILI SOLO FRA SPAZI CON LE MEDESIME DIMENSIONI.