Dato $T: V \to V$ T operatore $\Rightarrow \mathcal{U} < V$ è **invariante** per $T \Leftrightarrow T(u) \in \mathcal{U}$ $\forall u \in \mathcal{U}$

PROPOSIZIONE: Se $\mathcal{U}$ è sottospazio **invariante** per un operatore $T: V \to V$, biettivo $\Rightarrow$
$\Rightarrow \mathcal{U}$ è **invariante** anche per T^{-1}.

→ DIMOSTRAZIONE: Considero $u \in \mathcal{U}$, da dimostrare che $T^{-1}(u) \in \mathcal{U}$.
Per ipotesi $T(u) \in \mathcal{U}$, cioè $T(u) = v$ con $v \in \mathcal{U} \Rightarrow$
$\Rightarrow T^{-1}(T(u)) = T^{-1}(v) = u \in \mathcal{U}$.

DEFINIZIONE: Una matrice quadrata $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ è detta **DIAGONALIZZABILE** se è simile ad una matrice diagonale, cioè se $\exists$ D, matrice diagonale, e S, una matrice invertibile, tale che $D = S^{-1} A S$.

→ ESEMPIO:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A$ è diagonalizzabile?

Devo determinare la $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ e $S = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$, tale che $D = S^{-1} A S$.

invertibile: $x_{11} x_{22} - x_{12} x_{21} \neq 0$

cioè $SD = AS \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha x_{11} & \alpha x_{12} \\ \alpha x_{21} & \alpha x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} + 2x_{21} & x_{12} + 2x_{22} \\ 3x_{11} + 4x_{21} & 3x_{12} + 4x_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{11} + 2x_{21} = \alpha x_{11} \\ \vdots \end{cases}$$

$\Rightarrow$ A È DIAGONALIZZABILE $\Leftrightarrow$ TALE SISTEMA È RISOLUBILE.

POICHÉ MATRICI SIMILI SONO ASSOCIATE ALLO STESSO OPERATORE $\Rightarrow$
Se A è diagonalizzabile, posto $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ l'operatore ad esso associato in una base B, $\exists$ una base B_1 di $\mathbb{R}^m$ rispetto alla quale la matrice $[T]_{B_1}$ è diagonale:

$[T]_{B_1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots 0 & \alpha_n \end{pmatrix} \Rightarrow$ Posto $B_1 = \{v_1, \dots, v_m\} \Rightarrow T(v_1) = \alpha_1 v_1 + 0v_2 + 0v_3 + \dots + 0v_n$

$\Rightarrow T(v_1) = \alpha_1 v_1 \Rightarrow T(v_2) = \alpha_2 v_2, \dots, T(v_n) = \alpha_n v_n$

$\Rightarrow$ La base B_1 è formata da autovettori di T.

$\Rightarrow$ Possiamo definire T diagonalizzabile se $\exists$ una **base** di $\mathbb{R}^n$ **formata** da **autovettori** di T. (**DEFINIZIONE**)

Se $D = S^{-1} A S$ → S rappresenta il **CAMBIAMENTO di BASE**.

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^n; B) \arrow[r, "T \; ②"] & (\mathbb{R}^m, B) \arrow[d, "id_2"] \\
(\mathbb{R}^n, B_1) \arrow[u, "id_1"] \arrow[r, "T"] & (\mathbb{R}^m, B_1)
\end{tikzcd}$$

con matrice $[T]_B = \mathbf{A}$

$[id_1]^{B}_{B_1} = S$ ③ → id_1

id_2 ← S^{-1} ① $= [id_2]^{B_1}_{B}$

con matrice $[T]_{B_1} = \mathbf{D}$

→ Se ho $B_1 = \left\{ \binom{1}{2} ; \binom{3}{4} \right\}$ E B = BASE CANONICA $\mathcal{E}$ ⇒

$S = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ L'id non cambia i vettori che, in più, (I VETTORI DELLA BASE B_1) sono già scritti nella base canonica, QUINDI LA MATRICE $[id_1]^{\mathcal{E}}_{B_1}$ È DATA IMMEDIATAMENTE. E $[id_2]^{B_1}_{\mathcal{E}}$ È LA SUA INVERSA.

PROPOSIZIONE: $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è **diagonalizzabile** ⇔ $\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_g$ autovalori di T per i quali $\sum_{j=1}^{g} E_{\lambda_j} = \mathbb{R}^n$ $\left(\bigoplus_{j=1}^{g} E_j = \mathbb{R}^n \right)$.

→ DIMOSTRAZIONE: $\boxed{\text{"⇒"}}$ T diagonalizzabile ⇒ $\exists\, B_1$ base di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori, posto U_{λ_j} il sottospazio generato dagli autovettori di B_1, riferiti all'autovalore λ_j ⇒
$\Rightarrow U_1 + U_2 + \dots + U_g \leq E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_g} = \mathbb{R}^n$.

$\boxed{\text{"⇐"}}$ Considero $B_{E_{\lambda_j}} = \{ v_{1j}, \dots, v_{kj} \}$ base di E_{λ_j} ⇒
$\Rightarrow \bigcup_{j=1}^{g} B_{E_{\lambda_j}}$ costituisce una base di $\mathbb{R}^n$, che, dunque, è formata da autovettori ⇒ T è diagonalizzabile.

La proposizione precedente dice che $\boxed{\sum_{j=1}^{g} \dim E_{\lambda_j} = n}$. ⇔ T È DIAGONALIZZABILE

PROPOSIZIONE: T è diagonalizzabile ⇔ ogni radice del polinomio caratteristico di una qualunque matrice associata a T è nel campo su cui è definito T (nel nostro caso in $\mathbb{R}$) (e, QUINDI, $\sum_{j=1}^{g} \mu(\lambda_j) = n$)
E $\dim E_{\lambda_j} = \mu(\lambda_j)$ $\forall j = 1, \dots, g$.

→ ESEMPIO: $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\mathcal{C} = \{e_1, e_2\}$

$e_1 \longmapsto e_1 + e_2$

$e_2 \longmapsto 3e_1 - e_2$

$\boxed{\text{matrice associata all'operatore}}$ → $[T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ → T è biettiva

→ $T(x, y) = (x + 3y, x - y)$

→ T è diagonalizzabile? Considero $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 - 3 = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 = 4 \Rightarrow \lambda = \pm 2$ ← saranno due autovalori per T.

$\mu(2) = 1$ e $\mu(-2) = 1$ (Molteplicità).

(le radici con hanno molteplicità = 1, sono dette SEMPLICI)

Nel caso in cui tutte le radici siano semplici, la matrice è SEMPRE DIAGONALIZZABILE.

→ La matrice D non è unica, ma è unica a meno dell'ordine degli autovalori ed inoltre sarà: $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

(oppure $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ a seconda dell'ordine dei vettori nella base.)

→ Cerco S: e quindi cerco la base di autovettori:

→ E_2: $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$E_2: -x + 3y = 0$ (RETTA) $\Rightarrow B_{E_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

E_{-2} $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{-2}: x + y = 0$ (RETTA) $\Rightarrow B_{E_{-2}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

$B_{\mathbb{R}^2} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow S = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

→ Cerco S^{-1}: $\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 12 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 1/4 & -3/4 \end{array}\right) \Rightarrow S^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -3/4 \end{pmatrix}$

→ Verifica: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. ok.

N.B.

Data A quadrata, $n \times n$, cerco A^{2180}.

Se A è diagonale $\Rightarrow A^{2180} = \begin{pmatrix} a_{11}^{2180} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^{2180} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{2180} \end{pmatrix}$. (DA DIMOSTRARE)

APPLICAZIONE:

Se A è diagonalizzabile $\Rightarrow \exists\, D$ e $S \mid D = S^{-1}AS$ cioè $A = SDS^{-1} \Rightarrow$

$$A^{2180} = (SDS^{-1})^{2180} = \underbrace{(SDS^{-1})(SDS^{-1})\dots(SDS^{-1})}_{2180 \text{ volte}} = SD\underbrace{S^{-1}S}_{I}D\underbrace{S^{-1}S}_{I}D\underbrace{S^{-1}}_{I}\dots\underbrace{S}_{I}DS^{-1} =$$

$$= S\underbrace{DD\dots D}_{2180 \text{ volte}}S^{-1} = SD^{2180}S^{-1}.$$