Geometria

Spazio vettoriale V n-dimensionale, B_1 e B_2 due basi di V, chiediamo le coordinate di un vettore nella base B_2 se ~~nella~~ tali coordinate sono date nella base B_1: detto v tale vettore, le coordinate di v nella base B_1 definiscono un vettore colonna $[v]_{B_1}$ e, analogamente, sarà $[v]_{B_2}$ il vettore delle sue coordinate nella base B_2 $\Rightarrow$ se indico con $\mathcal{M}^{B_1}_{B_2}$ la matrice $n \times n$ le cui colonne esprimono le coordinate dei vettori della base B_1 espresse nella base B_2 $\Rightarrow [v]_{B_2} = \mathcal{M}^{B_1}_{B_2}[v]_{B_2}$ —

Ex: in $\mathbb{R}^3$ prendiamo la base canonica:

$$e = \left\{ \begin{vmatrix}1\\0\\0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}0\\1\\0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}0\\0\\1\end{vmatrix} \right\} \text{ e la base } B$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \quad \underbrace{}_{e_1 \quad e_2 \quad e_3}$$

$$B: \left\{ \underset{v_1}{\begin{vmatrix}1\\-1\\0\end{vmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{vmatrix}0\\2\\1\end{vmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{vmatrix}-1\\-2\\-1\end{vmatrix}} \right\}$$

cerchiamo il det. della matrice CON TALI COLONNE PER VERIFICARE CHE I VETTORI SIANO LIN. INDIP.

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq \emptyset \text{ : O.K.}$$

Ora, dato il vettore v tale che $[v]_e = \begin{vmatrix}1\\1\\1\end{vmatrix}$, cerco $[v]_B$, perciò costruisco $\mathcal{M}^e_B$: devo trovare le coordinate dei vettori della base canonica espresse nella base B:

$$\begin{vmatrix}1\\0\\0\end{vmatrix} = \alpha_1 \begin{vmatrix}1\\-1\\0\end{vmatrix} + \alpha_2 \begin{vmatrix}0\\2\\1\end{vmatrix} + \alpha_3 \begin{vmatrix}-1\\-2\\-1\end{vmatrix}$$

$$\mathcal{M}^e_B = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \text{ POICHÉ } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \mathcal{M}^B_e$$

E SAPENDO CHE:

> A partire da due basi qualunque B_1 e B_2 in uno spazio vettoriale V si ha sempre che $\mathcal{M}^{B_1}_{B_2} = \left(\mathcal{M}^{B_2}_{B_1}\right)^{-1}$

PER DETERMINARE $\mathcal{M}^e_B$ POSSO TROVARE L'INVERSA DI $\mathcal{M}^B_e$ CON UNO DEI METODI STUDIATI E QUINDI DETERMINARE $[v]_B$ FACENDO $[v]_B = \mathcal{M}^e_B \cdot [v]_e$.

Osservazione: $\mathcal{M}^B_e$ è la matrice che esprime il vettore con coordinate in base "B" in forma canonica "e", ed è sempre data ed è uguale all'inversa di $\mathcal{M}^e_B$).

$$\boxed{\mathcal{M}^e_B = \left(\mathcal{M}^B_e\right)^{-1}}$$

IN GENERALE:

ESEMPI DI BASI:

1) Considero $V = \mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R})$ e dimostro che l'insieme B è dato dalle matrici: dei vettori:

$$\left. \begin{matrix} \begin{vmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{vmatrix}, \\ \begin{vmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{vmatrix} \end{matrix} \right\} \text{base di } \mathcal{M}_{2\times3}$$

Pongo l'equazione matriciale, dimostrando l'indipendenza:

$$a \begin{vmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{vmatrix} + \dots + a_6 \begin{vmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{vmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\a_4&a_5&a_6\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{vmatrix}$$

quindi $a_{1\ldots6} = \emptyset$ e successivamente genero $\mathcal{M}_{2\times3}$:

dato $v = \begin{vmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_4&x_5&x_6\end{vmatrix} \overset{?}{=} b_1 \begin{vmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{vmatrix} + \dots + b_6 \begin{vmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{vmatrix}$

ci chiediamo: "esistono $b_1 \dots b_6$ tali da rendere l'equazione matriciale vera?"

$\begin{vmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_4&x_5&x_6\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}b_1&b_2&b_3\\b_4&b_5&b_6\end{vmatrix} \Rightarrow$ l'uguaglianza è vera se $b_i = x_i \quad \forall i = 1 \dots 6$

2) Ho $V = \mathbb{R}[x]_3$ come spazio di polinomi di grad ≤ 3 in una variabile in $\mathbb{R}$.

L'insieme $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ è base di $\mathbb{R}[x]_3$

Dato $a_1 1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 \iff a_{1\ldots4} = \emptyset$ } indipendenza

Sono Generatori? dato un vettore qualunque $p(x)$ in $\mathbb{R}[x]_3$ e quindi $p(x) = t_1 + t_2 x + t_3 x^2 + t_4 x^3 \overset{!}{=} \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3$

Mi domando se $\exists\, a_{1\ldots4}$ tali che è vera l'uguaglianza?

Sì, basta prendere $\alpha_i = t_i \quad \forall i = 1 \dots 4$

Proposizione: sia $V = \langle\langle v_1, \dots, v_p \rangle\rangle$ uno spazio vettoriale generato dai vettori $v_1 \dots v_p$. In V considero i vettori $w_1, \dots, w_q$ tali che $q > p \Rightarrow \{w_1, \dots, w_q\}$ é dato dai vettori linearmente dipendenti -

Dimostrazione: Per ipotesi $w_j = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} v_i$, $\forall j = 1, \dots, q$ Considero $\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_q w_q = 0$.

Quindi $\lambda_1 \left(\sum_i^p a_{i1} v_i\right) + \lambda_2 \left(\sum_i^p a_{i2} v_i\right) + \dots + \lambda_q \left(\sum_i^p a_{iq} v_i\right) = 0$

Se $v_1, \dots, v_p$ sono linearmente indipendenti, ottengo il sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 a_{11} + \dots + \lambda_q a_{1q} = 0 \\ \lambda_1 a_{21} + \dots + \lambda_q a_{2q} = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \lambda_1 a_{p1} + \dots + \lambda_q a_{pq} = 0 \end{cases}$$

La dimensione di $Sol_{\Sigma_\lambda} \neq 0 \Rightarrow$ i vettori sono lin. dipendenti

Se $v_1, \dots, v_p$ sono linearmente dipendenti possiamo considerare solo quelli linearmente indipendenti e ripetere il ragionamento con un numero inferiore di vettori $p' < p$

c.v.d

Corollario: Due basi B_1 e B_2 di uno stesso spazio vettoriale V hanno stessa cardinalitá -

Dimostrazione: Supponiamo per assurdo che $B_1 = \{v_1, \dots, v_p\}$ e $B_2 = \{w_1, \dots, w_q\}$ con $p \neq q$ e supponiamo $p < q$, ~~avendo~~ avendo supposto B_1 base di V allora l'insieme B_2 é linearmente dipendente essendo $q > p$, ma é assurdo perché B_2 é base $\Rightarrow$ non puó essere $p < q$ -

L'unica supposizione vera é che $p = q$

c.v.d.