06/5/15 $\boxed{\text{ESERCIZIO 1)}}$

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad [T]_{\mathcal{E}} = A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$[T]_{\mathcal{E}}$ è ortogonale?

$(A^T = A^{-1} \Rightarrow AA^T = I)$

le prima riga è la prima colonna dell'altra matrice, lo seconda è la seconda colonna ...

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Se A è simm. reale $\Rightarrow A \sim_c D$ cioè $\exists\, S$ invertibile tale che $D = S^T A S$, se S è ortogonale abbiamo $D = S^{-1} A S \Rightarrow A$ è diagonalizzabile)

$\Rightarrow T$ è isometrico $\Rightarrow \underbrace{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{PER IL TEOREMA DI STRUTTURA}}$ oppure $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ oppure $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$ oppure I

I NON PUÒ ESSERE PERCHÈ L'UNICA MATRICE SIMILE AD I È I STESSA!
ANALOGAMENTE L'UNICA MATRICE SIMILE A $-I$ PUÒ ESSERE SOLO $-I$: INFATTI $S^{-1}(-I)S = -I \Rightarrow$ LA FORMA CANONICA DI A NON PUÒ ESSERE $-I$.

RIMANGONO D e D_1; SE ANALIZZIAMO I LORO DETERMINANTI NOTIAMO CHE

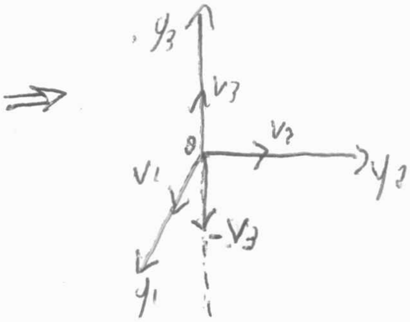
$|D| = -1$; $|D_1| = 1 \Rightarrow$ RICORDANDO CHE

Il det è un invariante per similitudine, CALCOLIAMO IL $|A|$

$\Rightarrow$ POICHÈ

$|A| = -1$, ALLORA la trasformazione geometrica associata ad A è della stessa "tipo" di quella associata a D. E $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ SARÀ LA "FORMA CANONICA" DI A, CIOÈ LA MATRICE ASSOCIATA A T nella base ortonormale determinata $\boxed{\text{NEL TEOREMA DI STRUTTURA}}$ $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\} \Rightarrow T(v_1) = v_1$; $T(v_2) = v_2$, $T(v_3) = -v_3$

$\Rightarrow$



Specchiamento rispetto al piano $y_3 = 0$

QUESTA È LA TRASFORMAZIONE GEOMETRICA T RIFERITA ALLE COORDINATE y_1, y_2, y_3 DETERMINATE DALLA BASE $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$

VOGLIO ESPRIMERE T NELLE COORDINATE x_1, x_2, x_3 DEFINITE DALLA BASE CANONICA INIZIALE $\Rightarrow$ IN TALE SISTEMA DI RIFERIMENTO il piano dello specchiamento sarà l'autospazio relativo all'autovalore 1 POICHE' $T(V_1)=V_1$ e $T(V_2)=V_2$ $\Rightarrow$ CERCHIAMO TALE AUTOSPAZIO

$$(A-\lambda I)X=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}-1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{(1-\sqrt{2})x_1 + x_2 = 0}$$

$\hookrightarrow$ piano in $\mathbb{R}^3$ rispetto al quale avviene il ribaltamento

[RANGO E 1 IN QUANTO

$$-\frac{\sqrt{2}-2}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}+2}{2}\right)-\frac{1}{2} = \frac{2}{4}-\frac{1}{2}=0 \ ]$$

$$\tilde{\pi}: (1-\sqrt{2})x_1 + x_2 = 0$$

considero una base di $\tilde{\pi}$: $x_2 = (\sqrt{2}-1)x_1$ $\Rightarrow$ $\mathcal{B}_{\tilde{\pi}} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{V_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}-1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{V_2} \right\}$

NE CERCO LA NORMA: $\|V_1\| = 1$ E

$\|V_2\| = \sqrt{1+(\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{4-2\sqrt{2}}$ $\Rightarrow$ NORMALIZZO I VETTORI V_1 E V_2 E DETERMINO UNA BASE ORTONORMALE DI π:

$$\Rightarrow \mathcal{B}_{\tilde{\pi}_u} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \\ \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

POICHE' POI $T(V_3) = -V_3$, CERCO L'AUTOSPAZIO RELATIVO A $\lambda=-1$:

(autospazio relativo all'autovalore -1)

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}+1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}+1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2}x_1 + (-\sqrt{2}+2)x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = (1-\sqrt{2})x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{B}_{\tilde{\pi}^{\perp}} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{V_3} \right\}$$

POICHE':

$\|V_3\| = \sqrt{4-2\sqrt{2}}$ $\Rightarrow$ CERCO $\mathcal{B}_{\pi^{\perp}_u} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \\ \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$\Rightarrow \mathcal{B}_{\perp n} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \\ \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2\sqrt{2}}} \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \\ \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\} ; \text{ E } S = \begin{pmatrix} V_1 & \frac{V_2}{\|V_2\|} & \frac{V_3}{\|V_3\|} \end{pmatrix}$$

È LA MATRICE TALE CHE $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = S^{-1}AS$

È LA BASE ORTONORMALE DI $\mathbb{R}^3$, DEL TESTO DEL TEOREMA DI STRUTTURA!

$\boxed{\text{ESERCIZIO 2}}$ CONSIDERIAMO L'OPERATORE $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ DEFINITA DA

$$[T]_C = A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} :$$

$AA^T = I$: VEDIAMO SE LA MATRICE È ORTOGONALE:

CERCHIAMO LA NORMA DEI VETTORI COLONNA:

$$\frac{\sqrt{4+4+1}}{3} = \frac{\sqrt{9}}{3} = 1 \quad ; \quad \frac{\sqrt{4+1+4}}{3} = 1 \quad ; \quad \frac{\sqrt{1+4+4}}{3} = 1$$

Sono normalizzati. I VETTORI COLONNA SONO ORTOGONALI!

$\Rightarrow$ T è isometrico!

La matrice non è simmetrica (quindi non diagonalizzabile)

$\Rightarrow$ LA MATRICE $[T]_C$ È SIMILE AD UNA DI QUESTE DUE MATRICI, PER IL TEOREMA DI STRUTTURA

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \text{ oppure } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$\det = 1$ $\qquad\qquad\qquad \det = -1$

POICHÉ $|A| = 1 \Rightarrow$ T È ROTAZIONE, E A È SIMILE ALLA MATRICE $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} = B$

LE DUE MATRICI A e B HANNO GLI STESSI AUTOVALORI:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta-\lambda & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left[\lambda^2 - 2\lambda\cos\vartheta + 1\right] = 0$$

$\lambda = 1$

$$\lambda = \frac{\cos\vartheta \pm \sqrt{\cos^2\vartheta - 1}}{1}$$ $\Rightarrow$ poiché $0 < \vartheta < \pi$ $\cos^2\vartheta < 1 \Rightarrow$ per $0 < \vartheta < \pi$ $\nexists$ radici reali

L'unico autovalore è 1, quindi cerco l'asse che sarà l'autospazio relativo a $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & -2/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

asse di rotazione $\Rightarrow r: \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = x_3 \end{cases}$ e $B_r = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = V$

$\Rightarrow$ Il primo vettore della nuova base sarà un vettore di base dell'asse di rotazione normalizzato $\Rightarrow \dfrac{V}{\|V\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Cerco il piano $\pi^\perp$ $\quad ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \Rightarrow \tilde{\pi} = r^\perp : x_1 + x_3 = 0$

TALE PIANO È IL SOTTOSPAZIO VETTORIALE CHE DETERMINA IL FASCIO DI PIANI PARALLELI IN CUI AVVIENE LA ROTAZIONE, PERPENDICOLARI ALL'ASSE DELLA ROTAZIONE

SAPPIAMO CHE LA TRACCIA DI UNA MATRICE È INVARIANTE PER SIMILITUDINE

Cerco θ: $\mathrm{Tr}\, A = \mathrm{Tr} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{3} = \cos\theta \Rightarrow \theta = \arccos\frac{1}{3}$ CON $0 < \theta < \pi$

MA: $\sin\theta = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \pm\frac{2}{3}\sqrt{2}$: IL SENO SARÀ POSITIVO SE L'ANGOLO È OTTENUTO CON UNA ROTAZIONE POSITIVA (IN VERSO ANTIORARIO), NEGATIVO SE LA ROTAZIONE AVVIENE IN VERSO NEGATIVO $\Rightarrow$ ABBIAMO DUE POSSIBILITÀ PER LA MATRICE FINALE:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \mp\frac{2}{3}\sqrt{2} \\ 0 & \pm\frac{2}{3}\sqrt{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

DOBBIAMO STABILIRE IL VERSO DI ROTAZIONE!

OPPURE: ABBIAMO $B_u = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow$ ABBIAMO $S = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ CHE È LA MATRICE DEL CAMBIAMENTO DI BASE! ED È LA MATRICE TALE CHE

$B = S^{-1} A S = S^T A S$ E QUINDI POSSIAMO CALCOLARE B!