6/10/14

• Data una ~~...~~ matrice $A \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$ si dice <u>TRASPOSTA di A</u> quella matrice indicata con $\boxed{A^T}$ $({}^TA, A^t, {}^tA, A', \dots)$, $A^T \in \mathcal{M}_{n\times p}$ così definita se:

$$A=(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,p\\ j=1,\dots,n}} \Rightarrow A^T=(b_{hk})_{\substack{h=1,\dots,n\\ k=1,\dots,p}} \text{ con } b_{hk}=a_{kh} \quad \forall\, h,k.$$

EX: $$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}_{2\times 3} \Rightarrow A^T=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}_{3\times 2}$$

PROPRIETÀ: 1) • Date $A,B\in\mathcal{M}_{p\times n} \Rightarrow (A+B)^T=A^T+B^T$.

2) • E per la moltiplicazione? $\left[(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T\right]$ in ordine inverso.

DIMOSTRARE 1) E 2) PER ESERCIZIO.

PROPOSIZIONE: Una matrice $A\in\mathcal{M}_{m\times m}$ è simmetrica $\iff A=A^T$.

(DIM. per esercizio)

↳ sono da dimostrare <u>due</u> proposizioni in effetti:

1. A simmetrica $\Rightarrow A=A^T$ (condizione necessaria)
2. $A=A^T \Rightarrow A$ simmetrica. (condizione sufficiente)

ESEMPIO di RISOLUZIONE di un SISTEMA: CON LA MATRICE ASSOCIATA:

sistema scalare
$$\begin{cases}x-2y+1=0\\2x-4y=-2\\x+3y=1\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x-2y=-1\\2x-4y=-2\\x+3y=1\end{cases} \qquad A=\begin{pmatrix}1&-2\\2&-4\\1&+3\end{pmatrix}_{3\times 2} \quad B=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix} \quad X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}_{2\times 1}$$

$$\underline{A\cdot X=B} \Rightarrow A\cdot X=\begin{pmatrix}1&-2\\2&-4\\1&+3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&-2y\\2x&-4y\\x&+3y\end{pmatrix}_{3\times 1}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x-2y=-1\\2x-4y=-2\\x+3y=1.\end{cases}$$

scrittura matriciale del sistema da eguagliare a B.

LAVORO SULLA MATRICE COMPLETA:

$$(A|B)=\left(\begin{array}{cc|c}1&-2&-1\\2&-4&-2\\1&+3&1\end{array}\right)_{3\times 3} \sim \underset{\substack{2R_1-R_2\to R_2\\ R_1-R_3\to R_3}}{\left(\begin{array}{cc|c}1&-2&-1\\0&0&0\\0&-5&-2\end{array}\right)} \sim \underset{\substack{R_3\to R_2\\ R_2\to R_3}}{\left(\begin{array}{cc|c}1&-2&-1\\0&-5&-2\\0&0&0\end{array}\right)} \sim$$

PIVOT

n° 2 PIVOT → il rango dell'insieme o della matrice associata è 2.

$$\sim \underset{5R_1-2R_2\to R_1}{\left(\begin{array}{cc|c}5&0&-1\\0&-5&-2\\0&0&0\end{array}\right)} \sim \underset{\substack{\frac{R_1}{5}\to R_1\\ \frac{R_2}{-5}\to R_2}}{\left(\begin{array}{cc|c}1&0&-1/5\\0&1&2/5\\0&0&0\end{array}\right)_{3\times 3}} \Rightarrow \begin{cases}x=-1/5\\y=2/5\end{cases}$$

EX :

$$\Sigma = \begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ x \qquad + z = 0 \end{cases}$$

Sto lavorando in uno spazio ambiente $\mathbb{R}^3$ (ho 3 incognite)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$R_1 - R_2 \to R_2$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \end{array}\right) \to$$

$R_1 - R_2 \to R_1$ $\qquad \frac{R_2}{-2} \to R_2$

IL # DI PIVOT DÀ IL RANGO DEL SISTEMA CHE COINCIDE CON IL RANGO DELLA MATRICE.

IL RANGO DÀ IL NUMERO DI VARIABILI DIPENDENTI

DI VARIABILI − RANGO = = # DI VARIABILI INDIPENDENTI O LIBERE

TALE NUMERO DÀ LA DIMENSIONE DELLO SPAZIO DELLE SOLUZIONI DEL SISTEMA

$$\to \begin{cases} x + z = 0 \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases} \to \begin{cases} x = -z \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases} \to \begin{cases} x = -k \\ z = k \quad (\text{con } k \in \mathbb{R}) \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

variabili dipendenti, il cui numero è uguale al numero dei PIVOT (o al rango) (*)

• NB: ~~Affinché~~ Un sistema ~~sia~~ è risolubile <=> rg(matrice dei coefficienti) = rg(matrice compl.) (TEOREMA di ROUCHÈ-CAPELLI)

(*) # variabili − rg(sistema) = # variabili indipendenti ~~(o slegate)~~

Ho quindi infinite soluzioni, al variare di k.
soluzioni $= \infty^1$ (ho un parametro k). ⇒ ho una retta di soluzioni.

$$\text{Sol } \Sigma = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{cases} x = -z \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases} \right\}$$

x	y	z	
-1	$-\frac{3}{2}$	1	$\to B(-1, -\frac{3}{2}, 1)$
0	$-\frac{3}{2}$	0	$\to A(0, -\frac{3}{2}, 0)$
-2	$-\frac{3}{2}$	2	

variabili legate o dipendenti (x, y) — variabili slegate (z)