Altre definizioni di RANGO

(1) numero di PIVOTS nella matrice ridotta a gradini

(2) utilizzo il DETERMINANTE della matrice

DETERMINANTE DI UNA MATRICE QUADRATA A: det(A) o |A|.

- Se $A \in \mathcal{M}_{1\times 1}(\mathbb{R})$ e quindi $A = a$ =>
  Determinante di A, che si indica con Det A (oppure con det(A), |A|, ‖A‖, [A], ...) coincide con a, cioè $|a| = a$

- Se $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

□ esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = -2$

- DETERMINANTE secondo LAPLACE per una matrice quadrata $n \times n$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ → posso scegliere una riga (o una colonna) qualunque di A: ad esempio la prima riga

. Definiamo SOTTOMATRICE di una qualunque matrice $\in \mathcal{M}_{p\times n}$ quella matrice che si ottiene togliendo h righe e/o k colonne in A

□ esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ • tolgo la 1° riga e nessuna colonna

=> rimane la matrice $(4\ 5\ 6)$

• tolgo la 2ª riga e la 2ª colonna di A

=> rimane $(1\ 3)$

• tolgo la 3ª colonna

=> rimane $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

→ le sottomatrici possono essere di qualunque tipo sia quadrate che rettangolari

- Determino le sottomatrici quadrate di A di ordine $n-1$, ottenute togliendo da A la riga e la colonna all'incrocio delle quali si trovano gli elementi della riga scelta (nel nostro caso la prima).
- Ora calcolo i determinanti di tali sottomatrici

$|A_{\hat{1j}}|$ DOVE $A_{\hat{ij}}$ È LA SOTTOMATRICE OTTENUTA TOGLIENDO DA A LA i-ESIMA RIGA E LA j-ESIMA COLONNA

$$\Rightarrow |A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} |A_{\hat{1j}}|$$

↳ si riferisce al posto OCCUPATO ~~dal~~ dall'elemento IN A.

□ esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow |A| = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$$

sostituisco i numeri

$$|A| = +1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 - 2 \cdot (-2) + 3(-1) = 1 + 4 - 3 = 2$$

TALE NUMERO (IL DETERMINANTE) NON CAMBIA SE SCELGO UN'ALTRA RIGA O COLONNA DI A:

⇒ adesso scelgo la 2ª colonna, quella rimane fissa mentre variano le righe

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$|A| = (-1)^{1+2} \cdot 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot (-2) + 1 \cdot 10 - 3 \cdot 4 = 4 + 10 - 12 = 2$$

deve venire uguale scegliendo qualsiasi riga o colonna

- non lo dimostriamo ma sotto c'è una teoria complessa.

Siccome posso scegliere io la riga o la colonna mi conviene scegliere quella dove ci sono più zeri per fare meno conti possibile.

→ Determinante secondo Laplace per una matrice quadrata $n \times n$. • sviluppato secondo la i-esima riga: $|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{\hat{i}\hat{j}}|$

• sviluppato secondo la j-esima colonna: $|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{\hat{i}\hat{j}}|$

Definiamo <u>MINORE</u> il determinante di una sotto-matrice quadrata di A

Definiamo <u>MINORE DI ORDINE k</u> il determinante di una sottomatrice di ordine k

Definiamo <u>COMPLEMENTO ALGEBRICO</u> di un elemento a_{ij} di A quadrata il numero $(-1)^{i+j} |A_{\hat{i}\hat{j}}|$.

PROPRIETA' DEI DETERMINANTI

1. se in A c'è una riga (o colonna) nulla $\Rightarrow |A| = 0$

2. se in A una riga (o colonna) è moltiplicata per uno scalare α, cioè $A = \begin{array}{c} \\ i\to \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} & * & \\ \alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} \; \cdots & \alpha a_{in} \\ & * & \end{pmatrix}$

$$|A| = \alpha \begin{vmatrix} & * & \\ a_{i1} & a_{i2} \; \cdots & a_{in} \\ & * & \end{vmatrix}$$

□ esempio $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -6 \end{vmatrix} = 2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 \cdot 2 & -2 \cdot 3 \end{pmatrix} \quad -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-1) = 2$

3. Cosa vale il determinante di αA, conoscendo il det A?

$$|\alpha \cdot A| = \alpha^n \cdot |A| \quad \text{con } A \in M_{n \times n}$$

4. Siano $A, B \in M_{n \times n} \Rightarrow |A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ $\boxed{\text{REGOLA DI BINET}}$

Deduciamo dalla regola di Binet una importante osservazione: supponiamo che A sia invertibile $\Rightarrow$

$\exists B$ t.c. $A \cdot B = B \cdot A = I \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & & & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow AB = I \Rightarrow |A \cdot B| = |I|$

$$|A||B| = 1 \Rightarrow \text{se } \exists B \Rightarrow |B| = \frac{1}{|A|}$$

$\Rightarrow$ il determinante di A deve essere $\neq 0$!

- una matrice in cui una riga o una colonna è formata da tutti 0 non è invertibile perché ha det uguale a 0.

5) Sia $D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}$ una matrice diagonale

$$\Rightarrow |D| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

6) Sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \cdots & & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ una matrice triangolare inferiore

$$\Rightarrow |A| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

→ La stessa cosa vale anche per la triangolare superiore

7) Il determinante di A è uguale a quello della sua trasposta

$$|A| = |A^T|$$

8) Date $A, B \in M_{n \times n} \Rightarrow |A+B| \neq |A| + |B|$

(dare un controesempio)

9) Se in A ci sono 2 o più righe uguali (analogamente per le colonne) $\Rightarrow |A| = 0$

10) Se scambio due righe tra loro $\Rightarrow$ il determinante cambia segno (analogamente per le colonne) (le righe possono essere vicine o distanti)

11) Sostituiamo ad una riga la somma di altre due: i determinanti delle due matrici equivalenti coincidono (operazione elementare determinantale)