10/12/14

$\exists$ applicazioni lineari iniettive $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$? RICORDIAMO LA

PROPOSIZIONE: $L: V \rightarrow W$ lineare è iniettiva $\Longleftrightarrow \ker L = \{0\}$.

Sappiamo che $\dim V = \dim \ker L + \dim \operatorname{Im} L$ (TEO. delle DIMENSIONI)

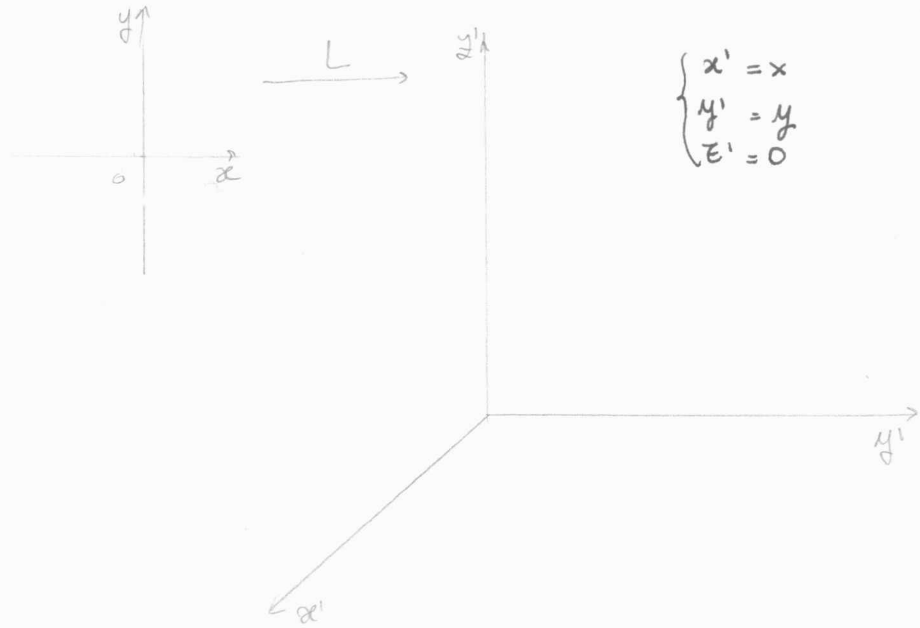
In questo caso però se $\ker L = \{0\} \Rightarrow \dim V = \dim \operatorname{Im} L$.

Poichè esiste un'applicazione in grado di fare ciò $\Rightarrow \exists\, L$ lineari $\mid L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$.
iniettive.

ESEMPIO:

$$L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y) \mapsto (x, y, 0)$$

ovvero "Immergiamo il piano in $\mathbb{R}^3$".



$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = 0 \end{cases}$$

$\exists$ applicazioni lineari $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ iniettive? CONSIDERIAMO AD ESEMPIO

$$L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y, z) \mapsto (x+y, z-x)$$

; L HA DUE COMPONENTI, LE APPLICAZIONI $L_1$ e $L_2$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} L_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto x+y \\ L_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto z-x \end{cases}$$

$\Rightarrow$ L (lineare) è iniettiva? NO.

$$\ker L = \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid L(v) = 0 \} =$$
$$= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid L((x, y, z) = (x+y, z-x) = (0,0) \}$$
$$= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \underbrace{\begin{cases} x+y=0 \\ z-x=0 \end{cases}}_{\Sigma_0} \} \Rightarrow rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$\Rightarrow \dim Sol\, \Sigma_0 = 3-2 = 1$. $\Rightarrow \ker L$ non è costituito solo dal vettore nullo.

$\Rightarrow L$ non è iniettiva. (1-1)

Per il teorema delle dimensioni $\rightarrow \nexists$ applicazioni lineari iniettive da $R^n$ a $\mathbb{R}^p$ con $\underline{p < n}$.

EX $\cancel{\dim} \overset{3}{V} = \cancel{\dim \mathrm{Ker}} \overset{0}{L} + \cancel{\dim \mathrm{Im}} \overset{\leq 2}{L}$ $\qquad$ sapendo che $\mathrm{Ker} L = \{0\}$

Non esistono applicazioni lineari suriettive da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^p$ con $\underline{p > n}$.

$\Downarrow$

$\exists$ applicazioni lineari biettive solo tra spazi di ugual dimensione.

---

PROPOSIZIONE:

$f: A \rightarrow B$ è biettiva $\Leftrightarrow$ è invertibile.
(cioè $\exists\, g: B \rightarrow A \mid g = f^{-1}$)
tale che $g \circ f = id_A$ e $f \circ g = id_B$)

PROPOSIZIONE:

Se $L: V \rightarrow W$, lineare, è invertibile $\Rightarrow$ la sua inversa $L^{-1}$ è ancora lineare (esercizio) $\Rightarrow L$ è isomorfismo (applicazione biettiva, la cui inversa è ancora un morfismo)

ESEMPIO: Sia $V$ un sp. vettoriale $n$-dimensionale reale, fissata una base $B_V = \{v_1, \dots, v_n\} \Rightarrow$ ogni $v \in V$ è dato come $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$

$\Rightarrow$ definiamo l'applicazione $L: V \rightarrow \mathbb{R}^n$
$v \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$\Rightarrow L$ è un isomorfismo tra i due spazi vettoriali.

$\rightarrow$ Lo possiamo dimostrare, dimostrando che è lineare e biettiva.

- Lineare ? $L(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 \cdot L(v_1) + \alpha_2 \cdot L(v_2)$ $\quad \forall v_1, v_2 \in V$ e $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$)?

(DA DIMOSTRARE)

• Iniettiva (1-1) ($Ker L = \{0\}$)? (DIMOSTRARE)

• Suriettiva (con teo. delle dimensioni)? (DIMOSTRARE)

Nel caso in cui tutte e tre le condizioni siano verificate, L sarà un isomorfismo.

L'isomorfismo che ho definito è NON CANONICO, ovvero ne esistono anche altri e dipendono dalla base $B_V$.

OSSERVAZIONE: Conosco la applicazione lineare $L : V \to W$ se conosco $L(v)$ per un generico $v \in V$.

Fissata una base $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ $\Rightarrow$ $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$
$\Rightarrow$ Cerco $L(v) = L(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) = x_1 \underline{L(v_1)} + \dots + x_n \underline{L(v_n)}$.

L è data se e solo se conosco le immagini dei vettori di una base di V.

PROPOSIZIONE: Dati V e W spazi vettoriali e $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V $\Rightarrow$ se dò $n$ vettori $w_1, w_2, \dots, w_n$ in W, $\exists$ sempre un'applicazione lineare $L : V \to W$ tale che $L(v_j) = w_j$ $\forall j = 1, \dots, n$. (da dim).

PROPOSIZIONE: Dati V e W spazi vettoriali e $v_1, \dots, v_k$ elementi di V linearmente dipendenti e $w_1, \dots, w_k \in W$ $\Rightarrow$ $\exists$ un'applicazione lineare $L : V \to W \mid L(v_j) = w_j$ per $j = 1, \dots, k$?

NON SEMPRE: Se ad esempio $L(v_1) = w_1$ $\Rightarrow$ se $v_2 = a v_1$ $\Rightarrow$ $L(v_2) = L(a v_1) =$
e $L(v_2) = w_2$
$= a L(v_1) = a w_1 = w_2$

$\Rightarrow$ $w_2$ deve essere uguale ad $a w_1$.

PROPOSIZIONE: Sia $L: V \to W$ applicazione lineare iniettiva $\Rightarrow$ $L$ mappa elementi linearmente indipendenti di $V$ in elementi linearmente indipendenti di $W$ (da dim).

OSSERVAZIONE: Un isomorfismo mappa una base in una base.

ESERCIZIO (per casa): Sia $Hom(V, W) = \mathcal{L}(V, W) = \{L: V \to W \text{ lineari}\}$.
Dimostrare che $Hom(V, W)$ è uno spazio vettoriale.

PROPOSIZIONE: Siano $L_1, L_2$ applicazioni lineari componibili.
$L_1: V \to W$ ed $L_2: W \to X \Rightarrow L_2 \circ L_1: V \to X$,
$L_1 \circ L_2: U \to W$.
$\Rightarrow$ sono lineari.

Dimostrazione: ① $L_2 \circ L_1: V \to X$ è lineare $\Leftrightarrow (L_2 \circ L_1)(v_1+v_2) = (L_2 \circ L_1)v_1 + (L_2 \circ L_1)v_2$
$\forall v_1, v_2 \in V$ e $(L_2 \circ L_1)(\alpha v) = \alpha(L_2 \circ L_1)v$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall v \in V$.

$$(L_2 \circ L_1)(v_1+v_2) = L_2(L_1(v_1+v_2)) \underset{L_1 \text{ lineare}}{=} L_2(L_1(v_1) + L_1(v_2)) =$$

$$\underset{L_2 \text{ lineare}}{=} L_2(L_1(v_1)) + L_2(L_1(v_2)) = (L_2 \circ L_1)(v_1) + (L_2 \circ L_1)(v_2)$$

② $$(L_2 \circ L_1)(\alpha v) = L_2(L_1(\alpha v)) = L_2(\alpha(L_1(v))) = \alpha(L_2(L_1(v))) = \alpha(L_2 \circ L_1)(v).$$

DEFINIZIONE: Un Morfismo $L: V \to V$ è detto anche Endomorfismo o Operatore.