SPAZIO DUALE

Sia V spazio vettoriale n-dimensionale su $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ definiamo SPAZIO DUALE di V, V^* o $V^\vee$ o $\mathrm{Hom}(V,\mathbb{R})$, $V^* = \{L: V \to \mathbb{R} \text{ lineare}\}$

Quando il codominio di un'applicazione è il campo su cui stiamo lavorando, l'applicazione è detta FORMA o FUNZIONALE $\Rightarrow$ possiamo dire che lo spazio duale di V è l'insieme di tutte le forme lineari su V.

Dotiamo V^* di una struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.
Definiamo la somma su V^*, "$+$", in questo modo: $(L_1+L_2)(v) = L_1(v)+L_2(v)\ \forall v \in V$ e $L_1, L_2 \in V^*$ e la moltiplicazione per uno scalare, "$\cdot\alpha$", in questo modo:
$(\alpha L)(v) = \alpha(L(v))\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, v \in V, L \in V^*$

$(V^*, +)$ è un gruppo: $+$ è associativa, cioè $L_1 + (L_2+L_3) = (L_1+L_2)+L_3$

$$(L_1+(L_2+L_3))(v) = L_1(v) + (L_2+L_3)(v) = L_1(v)+L_2(v)+L_3(v)$$
$$= (L_1(v)+L_2(v)) + L_3(v) = (L_1+L_2)(v) + L_3(v) =$$
$$= ((L_1+L_2)+L_3)(v)$$

$\exists$ elemento neutro: è l'applicazione nulla, cioè $L: V \to \mathbb{R}$, $v \mapsto 0$

l'opposto di L è $-L: V \to \mathbb{R}$, $v \mapsto -L(v) = L(-v)$

è abeliano: $L_1+L_2 = L_2+L_1$ $\quad \forall v\ (L_1+L_2)(v) = L_1(v)+L_2(v) =$
$$= L_2(v)+L_1(v) = (L_2+L_1)(v)$$

"$\cdot\alpha$" è associativa $(\alpha\beta)L = \alpha(\beta L)$ vero $\forall$ immagine: $\forall v \in V\ [(\alpha\beta)L](v) = (\alpha(\beta L))(v) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\alpha\cdot\beta)\cdot L(v) = \alpha\cdot(\beta\cdot L(v))$ vero in $\mathbb{R}$

$\exists$ elemento neutro $\alpha = 1$ e infine $\alpha(L_1+L_2) = \alpha L_1 + \alpha L_2$

Fisso una base su V, $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$
Definisco le forme lineari seguenti:

$$\varphi_1: V \to \mathbb{R} \quad \begin{aligned} v_1 &\mapsto 1 \\ v_2 &\mapsto 0 \\ &\vdots \\ v_n &\mapsto 0 \end{aligned} \qquad , \varphi_2: V \to \mathbb{R} \quad \begin{aligned} v_1 &\mapsto 0 \\ v_2 &\mapsto 1 \\ v_3 &\mapsto 0 \\ &\vdots \\ v_n &\mapsto 0 \end{aligned} \qquad , \dots, \varphi_n: V \to \mathbb{R} \quad \begin{aligned} v_1 &\mapsto 0 \\ &\vdots \\ v_{n-1} &\mapsto 0 \\ v_n &\mapsto 1 \end{aligned}$$

$$\varphi_j(v_i) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{DELTA} \\ \text{DI KRONEKER}}}{\delta_{ij}} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$f_j(v) = f_j(a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \ldots + a_m \cdot v_m) = a_1 \cdot \underbrace{f_j(v_1)}_{=0} + a_2 \cdot \underbrace{f_j(v_2)}_{=0} + \ldots + a_j \cdot \underbrace{f_j(v_j)}_{=1} + \ldots + a_m \cdot \underbrace{f_j(v_m)}_{=0} = a_j$

$\Downarrow$

associa a v la sua j-esima coordinata

1) Dimostro che $f_1, \ldots, f_m$ sono lin. indipendenti

2) Dimostro che $f_1, \ldots, f_m$ generano V^*

1) Considero $\alpha_1 \cdot f_1 + \alpha_2 \cdot f_2 + \ldots + \alpha_m \cdot f_m = 0 \Rightarrow$ da dimostrare che $\alpha_j = 0 \ \forall j = 1, \ldots, m$

$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot f_j = 0 \Rightarrow \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot f_j\right)(v) = 0(v) \ \forall v \in V \Rightarrow \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot f_j\right)(v_k) = 0(v_k)}_{\forall v_k \in B_V} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\alpha_j \cdot f_j(v_k)}_{} = 0$

$\Downarrow$

$\alpha_k \cdot f_k(v_k) = 0$

$\Downarrow$

$\alpha_k = 0 \ (\forall k = 1, \ldots, m)$ POICHÉ $f_k(v_k) \neq 0$

2) Voglio dimostrare che data $L \in V^* \Rightarrow \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ scalari tali che $L = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \cdot f_j$:

sia dunque $L: V \to \mathbb{R}$ una forma lineare tale che $L(v_1) = \beta_1, \ldots, L(v_m) = \beta_m$

Considero $\beta_1 \cdot f_1 + \beta_2 \cdot f_2 + \ldots + \beta_m \cdot f_m$: voglio dimostrare che $L = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \cdot f_j \Rightarrow$ valuto $L(v_k)$ e $\left(\sum_{j=1}^{m} \beta_j \cdot f_j\right)(v_k)$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow L(v_k) = \beta_k \\ &e \ \sum_{j=1}^{m} \beta_j \left(f_j(v_k)\right) = \beta_k \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda_j = \beta_j \ \forall j = 1, \ldots, m$$

$\Rightarrow$

$\{f_1, \ldots, f_m\}$ è base di $V^* \Rightarrow \dim(V^*) = \dim(V) = m \Rightarrow$ possiamo dare un isomorfismo!

DEFINISCO:

$\phi: V \to V^*$: con questa definizione ϕ è lineare: $\phi(v) = \phi\left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot v_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot f_j$

$v_1 \mapsto f_1$

$v_2 \mapsto f_2$

$\vdots$

$v_m \mapsto f_m$

Quest'applicazione è biettiva (mi manda una base in una base):

$$\left.\begin{aligned} &\phi \text{ è iniettiva: } \ker(\phi) = \{0\} \Rightarrow \phi \text{ è suriettiva} \\ &\phi \text{ è suriettiva: } \dim(\operatorname{Im}(\phi)) = m, \ \phi \text{ è iniettiva} \end{aligned}\right\} \text{ DA DIMOSTRARE.}$$

Questo isomorfismo non è canonico POICHÉ DIPENDE DALLA BASE SCELTA.

La base di V^*, B_{V^*}, $B_{V^*} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$, È DETTA <u>BASE DUALE</u> DI $B_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$

Posso costruire LO SPAZIO ~~il~~ duale del duale, $V^{**} = \{T: V^* \to \mathbb{R}, \ T \text{ lineare}\}$ (è uno spazio vettoriale con la stessa dimensione di V)

Possiamo definire un isomorfismo canonico che va da V a V^{**} che identifica i due spazi vettoriali: $\Psi: V \to V^{**}$ con $\psi(v): V^* \to \mathbb{R}$ con $L: V \to \mathbb{R}$

$v \mapsto \psi(v)$ $\qquad L \mapsto L(v)$

1) $\psi(v)$ è lineare: $(\psi(v))(L_1+L_2) = (\psi(v))(L_1) + (\psi(v))(L_2)$ e anche $(\psi(v))(\alpha \cdot L) = \alpha \cdot (\psi(v))(L)$

$\downarrow$

2) ψ è lineare

oppure $(\psi(v))(\alpha_1 \cdot L_1 + \alpha_2 \cdot L_2) = \alpha_1 \cdot (\psi(v))(L_1) + \alpha_2 (\psi(v))(L_2)$

3) ψ è biettiva

$\parallel$

$(\alpha_1 \cdot L_1 + \alpha_2 \cdot L_2)(v) = \alpha_1 \cdot L_1(v) + \alpha_2 \cdot L_2(v) =$

$= \alpha_1 (\psi(v))(L_1) + \alpha_2 (\psi(v))(L_2)$

2) $\psi(\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2) = \lambda_1 \cdot \psi(v_1) + \lambda_2 \cdot \psi(v_2)$

$(\psi(\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2))(L) = L(\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2) = \lambda_1 \cdot L(v_1) + \lambda_2 \cdot L(v_2) = \lambda_1 \cdot \psi(v_1) + \lambda_2 \cdot \psi(v_2)$

3) $\mathrm{Ker}(\psi) = \{0\}$ basta dimostrare questo (DA DIMOSTRARE)

Consideriamo come spazio vettoriale $V = \mathbb{R}_2[x]$ (polinomi di grado 2 nella variabile x).

Definiamo le seguenti forme lineari da $\mathbb{R}_2[x]$ in $\mathbb{R}$: $\varphi_1(p(x)) = \int_0^1 p(x)\,dx$;

$\varphi_2(p(x)) = p'(1)$; $\varphi_3(p(x)) = p(0)$

1) Dimostrare che $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ definisce una base di $(\mathbb{R}_2[x])^*$

2) Determinare la base duale di $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$