Proposizione: Sia V spazio vett. n-dimensionale, siano $v_1, \dots, v_k$ vett. lin. indip., $k < n \Rightarrow$ si possono determinare $n-k$ vettori di V, $w_1, \dots, w_{n-k}$, tali che $\{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_{n-k}\}$ sia base di V

Dimostrazione: pongo $U = \langle\langle v_1, \dots, v_k \rangle\rangle \Rightarrow U$ è sottospazio di V k-dimensionale.
Essendo $k < n \Rightarrow U \subset V \Rightarrow \exists\, w_1 \in V$ tale che $w_1 \notin U$
$\Rightarrow w_1$ non è combinazione lineare di $v_1, \dots, v_k \Rightarrow \{v_1, \dots, v_k, w_1\}$ è linearmente indipendente $\Rightarrow$ considero $U_1 = \langle\langle v_1, v_2, \dots, v_k, w_1 \rangle\rangle$
$\Rightarrow$ se $U_1 \equiv V$ la proposizione è dimostrata; se $U_1 \subset V \Rightarrow \exists$ $w_2 \in V$, ma $w_2 \notin U_1 \Rightarrow w_2$ non è combinazione lineare di $v_1, \dots, v_k, w_1$
$\Rightarrow \{v_1, \dots, v_k, w_1, w_2\}$ è formato da vettori linearmente indipendenti.
$\Rightarrow$ posso considerare $U_2 = \langle\langle v_1, \dots, v_k, w_1, w_2 \rangle\rangle \Rightarrow$ se $U_2 \equiv V$ abbiamo terminato la dimostrazione, se $U_2 \subset V \Rightarrow \dots$ Il procedimento non si ripete all'infinito perché le dimensioni sono finite, quindi si verificherà $U \equiv V$. A tal punto abbiamo la base cercata
C.V.D.

Per determinare praticamente la base cercata che contenga i vettori $v_1, \dots, v_k$ dati, possiamo procedere come indicato nella dimostrazione; oppure possiamo creare una matrice

$$A = \begin{pmatrix} [v_1]_B & [v_2]_B & \dots & [v_k]_B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}_{N \times k}$$

con $rg A = k$ e $k < N$

Definisco
$$(A \,|\, I) = \begin{pmatrix} [v_1]_B & \dots & [v_k]_B & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{N \times (k+N)} \Rightarrow rg(A \,|\, I) = N$$

Riduco $(A \,|\, I)$ a forma gradini canonica

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ k \rightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & * & * & 0 & * & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \dots 0 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & & & & & & & \\ 0 & \dots & & 1 & * & * & 0 & * & 0 & & 0 & * \\ \hline 0 & \dots & & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & & & 1 & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & * \end{pmatrix}$$

$l_1 \; l_2 \; \dots \; l_k$

$\uparrow$ $k+3$ $\qquad \uparrow$ $k+5 \; \dots$

La base cercata è $\{v_1, \dots, v_k, e_3, e_5 \dots\}$

Es In $\mathbb{R}^4$ $[v_1] = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ cerco una base di $\mathbb{R}^4$: $B = \{v_1, v_2, w_1, w_2\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6 & 10 \end{pmatrix}$$

linearmente indipendenti

$\Rightarrow$ la base ~~cercata~~ cercata è $\{v_1, v_2, e_1, e_2\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

PER QUANTO DIMOSTRATO PRECEDENTEMENTE.

$e_3 = v_1 + v_2 - e_1 + 3e_2 \qquad e_4 = -v_1 - 2v_2 + e_1 - 5e_2$.

Dati due sottospazi vettoriali U e $W < V \Rightarrow$ abbiamo definito $\boxed{U + W = \{u + v \text{ tali che } u \in U \text{ e } w \in W\}}$

Teorema di Grassmann: $\dim U + \dim W = \dim(U+W) + \dim(U \cap W)$

Dimostrazione: Sia V sp. vett. n-dimensionale, $\dim U = p$, $\dim W = q$ e ~~dim~~ $\dim(U \cap W) = k$ $\quad (p \le n, q \le n, k \le p, k \le q)$.

Sia $B_{U \cap W} = \{v_1, \dots, v_k\} \Rightarrow$ possiamo estendere $B_{U \cap W}$ ad una base di U, $B_U = \{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_{p-k}\}$ e ad una base di W, $B_W = \{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_{q-k}\}$

Sia $v \in U + W \Rightarrow v = u + w = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k + b_1 u_1 + b_2 u_2 + \dots + b_{p-k} u_{p-k} +$
$+ c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_k v_k + d_1 w_1 + \dots + d_{q-k} w_{q-k}$
$= (a_1 + c_1) v_1 + \dots + (a_k + c_k) v_k + b_1 u_1 + \dots + b_{p-k} u_{p-k} + d_1 w_1 + \dots + d_{q-k} w_{q-k}$

$\Rightarrow \langle\langle v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_{p-k}, w_1, \dots, w_{q-k} \rangle\rangle = U + W$: $k + p - k + q - k = p + q - k$:

$U + W$ È GENERATO DA $p+q-k$ VETTORI

$\Rightarrow$ Le dimostro che sono linearmente indipendenti $\Rightarrow \dim(U+W) = p+q-K$

Dimostro la loro lineare indipendenza:

$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_{p-k} u_{p-k} + \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_{q-k} w_{q-k} = 0$

$$\underbrace{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_{p-k} u_{p-k}}_{\in U} = \underbrace{-\gamma_1 w_1 - \dots - \gamma_{q-k} w_{q-k}}_{\in W}$$

$\Rightarrow -\gamma_1 w_1 - \dots - \gamma_{q-k} w_{q-k} \in U \cap W \Rightarrow \delta_1 v_1 + \dots + \delta_k v_k + \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_{q-k} w_{q-k} = 0$

ma $v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_{q-k}$ sono linearmente indipendenti perché costituiscono $\mathcal{B}_W$

$\Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_{q-k} = \delta_1 = \dots = \delta_k = 0$

$\Rightarrow \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_{p-k} u_{p-k} = 0$ ma $v_1, \dots v_k, u_1, \dots, u_{p-k}$ sono lin. ind. perché formano $\mathcal{B}_U \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_k = \beta_1 = \dots = \beta_{p-k} = 0$

$\Rightarrow v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_{p-k}, w_1, \dots, w_{q-k}$ sono lin. ind. $\Rightarrow \dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$

C.V.D.

Esempio $U = \pi_1 < \mathbb{R}^3$; $W = \pi_2 < \mathbb{R}^3$ è possibile che $\pi_1 \cap \pi_2 = \{0\}$? cioè $\pi_1 \oplus \pi_2$?

Se così fosse, per il T. di Grassmann $\dim(\pi_1 + \pi_2) = \dim \pi_1 + \dim \pi_2 - \dim(\pi_1 \cap \pi_2) = 4$

NON E' POSSIBILE PERCHE' $\pi_1 + \pi_2 \subset \mathbb{R}^3$