DIMOSTRAZIONE PER INDUZIONE

- Deriva dal $\underbrace{\text{definizione}}_{\text{V ASSIOMA DELLA}}$ di Peano dei numeri naturali.

I numeri naturali è un insieme di numeri che rispetta alcuni assiomi.

- $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists\, n+1 \in \mathbb{N}$ (N+1 È DETTO "SUCCESSORE" DI N)
- $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ che non è successore di nessun numero: $n_0 = 0$

V - Se un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ è tale che contiene lo 0 e se contiene un numero naturale $n \Rightarrow$ CONTIENE $n+1$, allora il sottoinsieme è $\mathbb{N}$ CIOÈ:

Se $\exists\, A \subset \mathbb{N}$ tale che $0 \in A$ e $\forall n \in A,\ n+1 \in A \Rightarrow A \equiv \mathbb{N}$

ORA:

Sia $A = \{n \in \mathbb{N}$ che verificano una determinata proposizione$\}$

$= \{n \in \mathbb{N}$ tali che $p(n)$ è vera$\}$ $\Rightarrow$ Se <u>VERIFICO</u> che $0 \in A$ e <u>DIMOSTRO</u> che preso $n \in A \Rightarrow$ $n+1 \in A$ (cioè se $p(n)$ è vera $\Rightarrow p(n+1)$ è vera)

$\Rightarrow A \equiv \mathbb{N}$ (tutti i numeri naturali ~~rispettano~~ VERIFICANO la proposizione)

- A volte lo 0 non può essere preso (perché AD ESEM. N COMPARE AL DENOMINATORE) nella proposizione, ~~[illegible]~~, va preso il più piccolo numero di $\mathbb{N}$ che sia accettabile per ~~[illegible]~~ la proposizione IN ESAME.

ESEMPIO

$$0+1+2+3+4+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in N$$

DIMOSTRO PER INDUZIONE.

Si prende il più piccolo n accettabile, in questo caso 0

1°) $n = 0$ è verificata PERCHÈ $0=0$

2°) Suppongo che per $\underbrace{\text{ogni}}_{\text{NATURALE } \leq n}$ la proposizione sia verificata.

Tesi -> Devo dimostrarla per $n+1$

Cioè DEVO DIMOSTRARE L'UGUAGLIANZA :

$$\underbrace{0+1+2+3+\dots+n}+(n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

Per Hp. di INDUZIONE $\frac{n(n+1)}{2} = 0+1+2+3+\dots+n$ => SOSTITUISCO

$$\frac{n(n+1)}{2}+(n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

È DIMOSTRATO PER INDUZIONE.

OPERAZIONI ELEMENTARI riga che trasformano la matrice in MATRICI EQUIVALENTI, CAMBIANO IL DETERMINANTE DELLA MATRICE? AD ESEMPIO:

$$A = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} R_1 + R_2 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = |B|$$

CERCO $|B| = ?$ Per rispondere sfrutto un'ulteriore proprietà dei determinanti:

12° - se $A = \begin{pmatrix} R_1 + R_1' \\ R_2 \\ R_3 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \vdots \\ R_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} R_1' \\ R_2 \\ R_3 \\ \vdots \\ R_n \end{vmatrix}$

ESEMPIO

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right| = (4-6) + (-4) = -6$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} R_1 + R_1' \\ R_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -6$$

Si ritorna alla formula $|B|$?

$$|B| = \begin{vmatrix} R_1 + R_2 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} R_2 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{vmatrix}}_{=\,0} = |A| + 0 = |A| \Rightarrow$$

$|A| = |B|$

Non cambia il determinante!

0 PERCHÉ LA MATRICE HA DUE RIGHE UGUALI

~~Calcolare per n~~

- Dimostrare per induzione che: PROPOSIZIONE se scambiamo due righe di una matrice tra loro allora il determinante cambia segno. [DA DIMOSTRARE PER ESERCIZIO]

PROPOSIZIONE:

- Se in una matrice ci sono due righe uguali allora il suo determinante è nullo

DIMOSTRAZIONE:

POICHÈ Se $A = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_N \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} R_2 \\ R_1 \\ R_3 \\ \vdots \\ R_N \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = -|B|^{\circledast} \Rightarrow$

Se $A = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_1 \\ \vdots \\ R_N \end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_1 \\ \vdots \\ R_N \end{pmatrix} \Rightarrow A = B \Rightarrow |A| = |B|$

ma si ha anche $|A| = -|B|$ per $\circledast$. Ciò vale solo se

$|A| = |B| = 0$

Se invece nella (OPERAZIONE DI) somma TRA RIGHE, UNA O ENTRAMBE (SONO MOLTIPLICATE) per uno scalare; COME CAMBIA IL DETERMINANTE?

ESEMPIO:

$$\begin{vmatrix} R_1 + kR_2 \\ R_2 \\ R_n \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_n \end{vmatrix}}_{=|A|} + \underbrace{\begin{vmatrix} kR_2 \\ R_2 \\ R_n \end{vmatrix}}_{=k\cdot 0} = |A| + k\cdot 0 = |A|$$

Se si moltiplica per scalare la riga non sostituita $\Rightarrow$ IL DETERMINANTE NON CAMBIA E L'OPERAZIONE È DETTA: Operazione DETERMINANTALE

Se si moltiplica la riga sostituita; VEDIAMO AD ESEMPIO:

$$\begin{vmatrix} hR_1 + kR_2 \\ R_2 \\ R_n \end{vmatrix} = h\underbrace{\begin{vmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_n \end{vmatrix}}_{=h|A|} + k\begin{vmatrix} R_2 \\ R_2 \\ R_n \end{vmatrix} = h|A| + k\cdot 0 = h|A|$$

$\Rightarrow$ IL DETERMINANTE È CAMBIATO!

Spesso si riduce la matrice (A GRADINI) per calcolare (PIÙ FACILMENTE) il determinante: bisogna fare le operazioni determinantali, SE NON VOGLIAMO CAMBIARLO!

Proposizione ⊙

Il rango di una matrice $A_{n \times n}$ è $n \iff \det A \neq 0$

~~[illegible]~~

Def. Rango = Definiamo RANGO di una matrice A l'ordine massimo dei minori non nulli. $A \in M_{p \times n}$

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}_{3 \times 4} \Rightarrow 1 \leq Rg A \leq 3$$

AD ESEMPIO $2 = a_{12}$
~~[illegible]~~ è un minore non nullo (della STESSA sottomatrice 1×1, a_{12})
Non sappiamo se 1 è l'ordine massimo. $\Rightarrow$
Prendiamo una sottomatrice di ordine 2

AD ESEMPIO $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ IL RANGO PUÒ ESSERE 2 $\Rightarrow$

Prendiamo matrici 3×3

AD ESEMPIO: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 6 & 8 & 10 \end{vmatrix} \Rightarrow R_1 + R_2 = R_3 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 0$

$6 = 5+1$, $8 = 6+2$, $10 = 7+3$; $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 0$

Bisogna cercare le altre matrici 3×3 e vedere se I LORO DETERMINANTI sono uguali a 0 O NO

(IN UN ALTRO FOGL.)

ESEMPIO: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 8 \\ 6 & 10 & 12 \end{vmatrix} = 0$ Così negli altri casi.
Tutte le matrici 3X3 hanno determinante $= 0$

Allora il rango ha ordine 2

$$rg\, A = 2.$$

Dalla definizione si arriva alla proposizione, ma bisogna dimostrare che le due definizioni di rango coincidono.

MATRICE INVERSA

$A \in M_{n\times n}$ è INVERTIBILE $\iff \det A \neq 0$

Data A INVERTIBILE $\to$ si vuole calcolare A^{-1} cioè la matrice tale che $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

1° METODO) (Per calcolare A^{-1})

Data A, costruiamo la matrice AGGIUNTA di A, A^* cioè la matrice che ha per entrate i complementi algebrici delle entrate di A

$\Rightarrow A^* \in M_{n\times n} \Rightarrow$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{(A^*)^T}{|A|}}$$

ESEMPIO

$A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \to \exists A^{-1}$? $|A| = 4-6 = -2 \neq 0 \to \exists A^{-1}$!

Cerco $A^* = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & +1 \end{pmatrix}$ $(-1)^{1+2} |A_{\hat{1}\hat{2}}|$ = complemento algebrico di a_{12}

$(A^*)^T = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & +1 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & +1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & +1 \\ +\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Bisogna fare la verifica $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$