APPLICAZIONI LINEARI COME MATRICI 15/12/14

Sia

$L : V \longmapsto W$ un'applicazione lineare fra spazi vettoriali, $B_V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ base di V e $B_W = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ base di W

Sia $v \in V \Rightarrow v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_p v_p$
e poniamo $L(v) = w$ con $w \in W$
e quindi

$L(x_1 v_1 + \dots + x_p v_p) = w \Rightarrow$ per la linearità di $L \Rightarrow x_1 L(v_1) + x_2 L(v_2) + \dots + x_p L(v_p) = w$

Cerchiamo le immagini degli elementi di base.
Se abbiamo $L(v_1) = u_1 = a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + \dots + a_{m1} w_m$
analogamente $L(v_2) = u_2 = a_{12} w_1 + a_{22} w_2 + \dots + a_{m2} w_m$
Cercando tutte le immagini, l'ultima sarà

$L(v_p) = u_p = a_{1p} v_1 + \dots + a_{mp} w_m$
Infine $L(v)$ fa parte del codominio e anche questo sarà combinazione lineare di base.

$L(v) = w = y_1 w_1 + \dots + y_m w_m$

Adesso trovate le immagini, le sostituiamo uguagliandole a w (immagine)

$\Rightarrow$

$$x_1(a_{11} w_1 + \dots + a_{m1} w_m) + x_2(a_{12} w_1 + \dots + a_{m2} w_m) +$$

$$\dots + x_p(a_{1p} w_1 + \dots + a_{mp} w_m) = y_1 w_1 + \dots + y_m w_m$$

Raccogliendo i vettori

$\Rightarrow$

$$(x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \dots + x_p a_{1p}) w_1 + (x_1 a_{21} + \dots + x_p a_{2p}) w_2$$

$$+ \dots + (x_1 a_{m1} + \dots + x_p a_{mp}) W_m = y_1 w_1 + \dots + y_m w_m$$

$\Rightarrow$ Scriviamo sotto forma di sistema, uguagliando le coordinate dei due vettori

$$\begin{cases} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \dots + x_p a_{1p} = y_1 \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \dots + x_p a_{2p} = y_2 \\ \vdots \\ x_1 a_{m1} + x_2 a_{m2} + \dots + x_p a_{mp} = y_m \end{cases}$$

Scriviamo il sistema sotto forma matriciale dove le incognite sono $(x_1 \dots x_p)$.

Σ in forma matriciale

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix}}_{m \times p}^{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Questa è la matrice del sistema

Prendo la matrice A (COME MATRICE) associata all'applicazione L dalla B_V alla B_W

$$A = [L]_{B_V}^{B_W} \Rightarrow L(v) = w \quad \text{CON: } [L]_{B_V}^{B_W} \in \mathcal{M}_{m \times p}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{[L]_{B_V}^{B_W} [v]_{B_V} = [w]_{B_W} = [L(v)]_{B_W}}$$

Questa è l'applicazione lineare espressa sotto forma matriciale.

ESEMPIO $\downarrow$

ESEMPIO $L: \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^3$

$(x,y) \longmapsto (2x-y, y, x+y)$

Fisso una base di $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^2}$ (base canonica), e una base di $\mathbb{R}^3$ =>

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$ sono lin. INDIPENDENTI.

Cerco $[L]_{B_{\mathbb{R}^2}}^{B_{\mathbb{R}^3}}$ formata dai coefficienti della combinazione lineare ~~espressi nella~~ che esprime l'immagine dei vettori di base, colonna per colonna. Per costruire la matrice, bisogna trovare le immagini delle basi di $\mathbb{R}^2$ e di $\mathbb{R}^3$.

$$L(e_1) = L(1,0) = (2,0,1)$$

Cerchiamo le coordinate di $(2,0,1)$ nella base di W. Come fare:

$$\begin{cases} 2 = y_1 + 2y_2 - y_3 \\ 0 = y_1 + 0y_2 + \cancel{0y_3} \\ 1 = y_1 + y_2 + \cancel{0y_3} \end{cases} \to \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 1 \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

Abbiamo fatto i conti ma sapevamo già che le coordinate DI L(e1) fossero (0, 1, 0) proprio perché (2, 0, 1) è IL SECONDO vettore di base di W.

$$L(e_1) = L(1,0) = (2,0,1) = 0\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$L(e_2) = L(0,1) = (-1,1,1) = 1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -1 = y_1 + 2y_2 - y_3 \\ 1 = y_1 \\ 1 = y_1 + y_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow [L]^{B}_{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^2}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \\ 2y \end{pmatrix}$$

Quest'applicazione è uguale a quella data prima $(x,y) \to (2x-y,\ x+y)$, solo che nella forma trovata è già espressa nella basi DATE del DOMINIO E DEL codominio, MENTRE all'inizio era DATA CONSIDERANDO come basi del dominio E DEL CODOMINIO, LE BASI CANONICHE.

Nel esempio se $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$(x,y) \longmapsto (2x-y, y, x+y)$

Prendiamo le basi canoniche $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^2}$ e $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^3}$

Quando tutto è espresso nella base canonica i coefficienti DELLE COMBINAZIONI LINEARI sono uguali alle COORDINATE dei vettori.

ESEMPIO

$L(e_1) = (2,0,1)$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

A questo punto possiamo scrivere la matrice, sapendo quanto detto, poiché le basi sono canoniche. $\begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 1 \end{cases}$

$$[L]^{\mathcal{C}_{\mathbb{R}^3}}_{\mathcal{C}_{\mathbb{R}^2}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

$\in M_{3\times 2}$

In questo caso le righe sono formate dai coefficienti delle COMPONENTI DELLA FUNZIONE LIN. ~~[illegible]~~ data all'inizio

Se cerchiamo il vettore GENERICO POSSIAMO FARE:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ y \\ x + y \end{pmatrix}$$

che non è altro che la ~~[illegible]~~ applicazione NELLA FORMA data all'inizio.

Indipendentemente dalle basi (SCELTE NEGLI SPAZI VETTORIALI) ~~fatte~~ ~~[illegible]~~, se si conosce la matrice si sa tutto dell'applicazione LINEARE AD ESSA ASSOCIATA.

Il rango della matrice dice quanti vettori (DELL'IMMAGINE) ~~sono~~ linearmente indipendenti. E quindi possiamo conoscere anche la dimensione dell'immagine.

$$\boxed{rg\, [L]_{B_V}^{B_W} = \dim \mathrm{Im}\, L}$$

Si può conoscere anche la $\dim \mathrm{Ker}\, L$.

Se (CONSIDERATO) ~~[illegible]~~ il sistema che abbiamo usato per trovare $[L]_{B_V}^{B_W}$, si prende come immagine il vettore nullo,

$\Rightarrow$ ~~Spaz~~ LA DIMENSIONE DELLO SPAZIO DELLE SOLUZIONI ~~[illegible]~~ $\equiv$ DIMENSIONE DEL NUCLEO DI L

Dall'esempio

$$rg\, [L]_{e_{\mathbb{R}^2}}^{e_{\mathbb{R}^3}} = 2 \qquad \underset{\substack{\text{DIMENSIONE} \\ \text{SPAZIO AMB.}}}{2} - \underset{\text{RANGO DEL SISTEMA}}{2} = \underset{\substack{\text{DIMENSIONE DEL} \\ \text{NUCLEO}}}{0}$$

$\Rightarrow$ IN QUESTO CASO:

L'applicazione L è BIETTIVA.

IN GENERALE PER IL TEOREMA DELLE DIMENSIONI:

$$\dim \mathrm{Ker}\, L = \dim V - \dim \mathrm{Im}\, L$$
$$= \dim V - rg\, [L]_{B_V}^{B_W}$$

Proposizione

Un'applicazione COMPOSTA da due applicazioni lineari è anche essa lineare.

Sia $L_1 : V \longmapsto W$ lineare con matrice $[L_1]_{B_V}^{B_W}$ e

$L_2 : U \longmapsto S$ lineare con matrice $[L_2]_{B_U}^{B_S}$

=> Considero, supponendo che si possa fare,

$L_2 \circ L_1 : V \longmapsto S$. =>

allora $\boxed{[L_2 \circ L_1]_{B_V}^{B_S} = [L_2]_{B_W}^{B_S} \cdot [L_1]_{B_V}^{B_W}}$

DIMOSTRAZIONE => si tratta di un calcolo per far vedere l'uguaglianza DI OGNI ENTRATA DELLE DUE MATRICI.

Per abbreviare si può far vedere solo per un'entrata.
(FARE)

ESEMPIO (pag. 9)

ESEMPIO (operatori o endomorfismi)

$$L_1 : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^3 \qquad (x,y) \quad (2x-y, y, x+y)$$

$$L_2 : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3 \qquad (x,y,z) \longmapsto (x, x-y, z)$$

$$\Rightarrow \quad L_2 \circ L_1 : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^3$$

$$(x,y) \longmapsto (2x-y, 2x-y-y, x+y) =$$

$$= (2x-y, 2x-2y, x+y)$$

Le matrici associate a

L_1 e L_2 saranno

$$[L_1]^{B_{\mathbb{R}^3}}_{B_{\mathbb{R}^2}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad [L_2]^{B_{\mathbb{R}^3}}_{B_{\mathbb{R}^3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

$$[L_2 \circ L_1]^{B_{\mathbb{R}^3}}_{B_{\mathbb{R}^2}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

Adesso vediamo se vale l'uguaglianza

$$[L_1] \cdot [L_2] = [L_2 \circ L_2]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Come consideriamo in questo modo una matrice che da cambiamento di base: È LA MATRICE ASSOCIATA ALL' applicazione ~~consideriamo la matrice~~ identità.

$$id : V \longmapsto V$$
$$v \longmapsto v$$

Si avrà la matrice identità applicata all'applicazione identità?

~~la risposta~~ $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0\,1 \end{pmatrix}$

La risposta è sì, solo se la base del dominio e del codominio sono uguali!

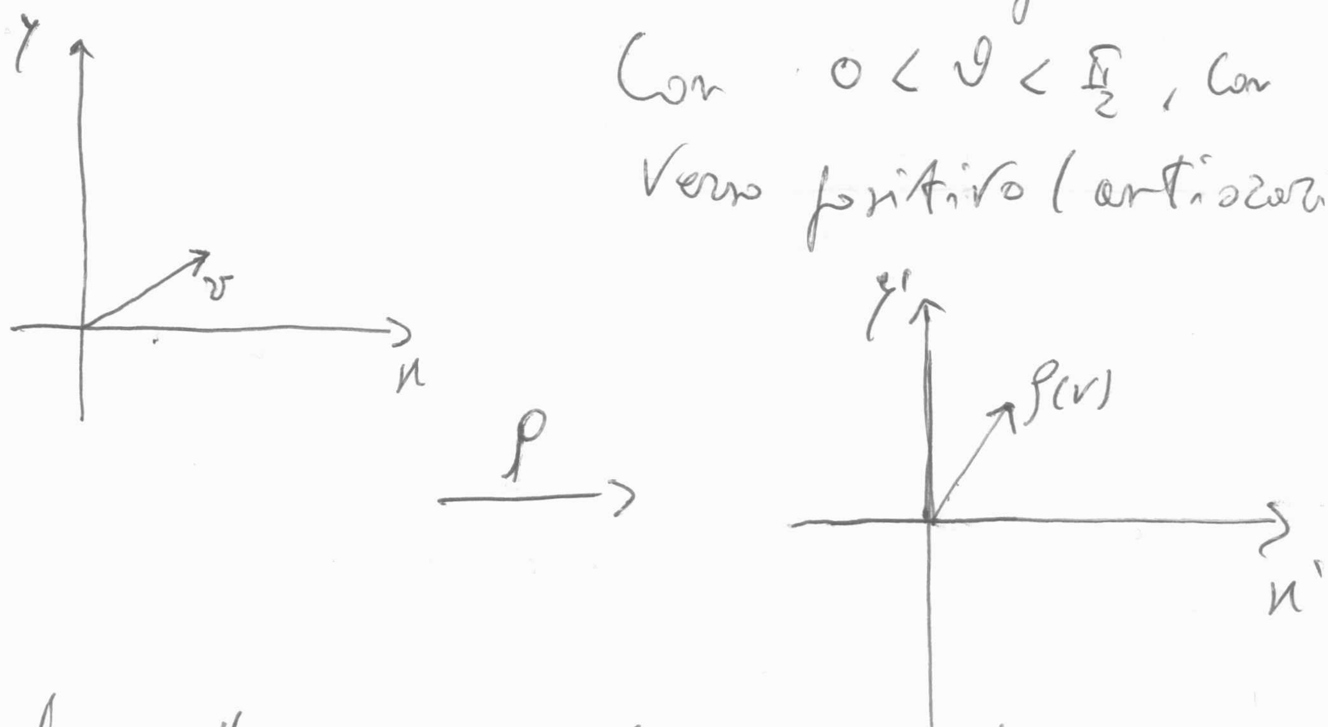
$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0\,1 \end{pmatrix} \Rightarrow [id]^{B}_{B} = I$$

$$id : (V, B_1) \longmapsto (V, B_2)$$

$\Rightarrow [id]^{B_2}_{B_1}$ è la matrice del cambiamento di base non è I.

APPLICAZIONE ROTAZIONE nel piano

Sia $\rho : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ una rotazione nel piano di angolo ϑ.
Con $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$, con verso positivo (antiorario)

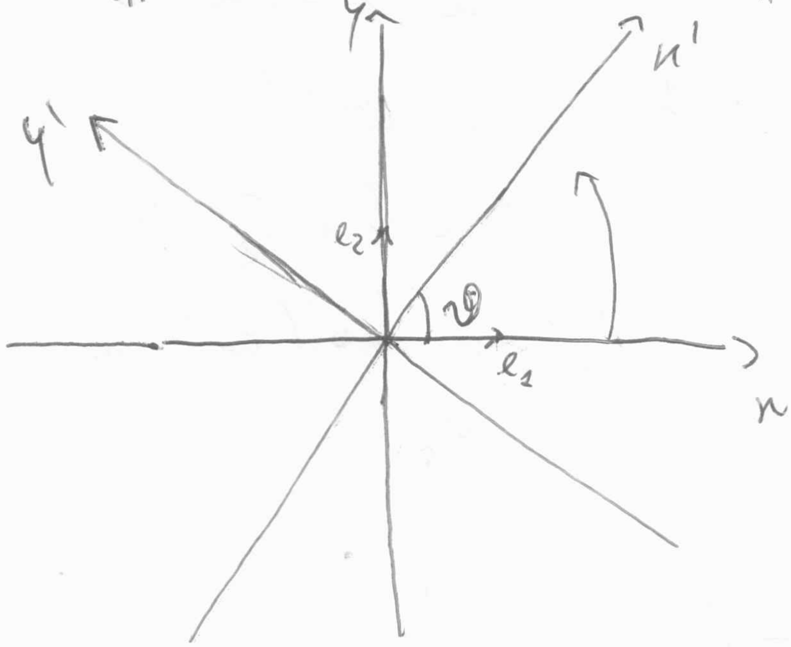


La domanda è: qual è la matrice associata a ρ?

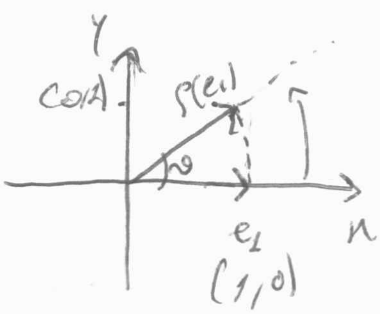
Considerata la base canonica $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^2}$ nel dominio e analogamente nel codominio $\Rightarrow$ cerco

$$[\rho]^{\mathcal{C}_{\mathbb{R}^2}}_{\mathcal{C}_{\mathbb{R}^2}}$$

Se invece si effettua una rotazione del sistema di riferimento di un angolo ϑ. Quale la matrice del cambiamento di base?

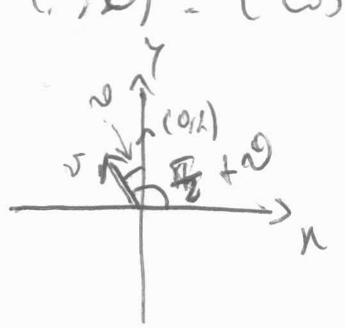


Cerco prima $[\rho]^{e_{\mathbb{R}^2}}_{e_{\mathbb{R}^2}}$



Quali saranno le coordinate del vettore ruotato?
Quindi cerco l'immagine di e_1 tramite ρ, e di e_2 tramite ρ.

$$\rho(1,0) = (\cos\vartheta, \sin\vartheta)$$



$$\rho(0,1) = (-\sin\vartheta, +\cos\vartheta)$$

⇒ Abbiamo le ~~coordinate~~ ENTRATE della matrice saranno:

$$[\rho]^{e_{\mathbb{R}^2}}_{e_{\mathbb{R}^2}} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\operatorname{sen}\vartheta \\ \operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

~~Trovata~~ QUESTA è la matrice ASSOCIATA ~~di da~~ alla rotazione del piano DI ANGOLO ϑ IN VERSO ANTIORARIO ~~[illegible]~~.