16/03/15

Risoluzione esercizio

$V=\mathbb{R}_2[x]$ $\quad \varphi_1=\int_0^1 p(x)\,dx \quad \varphi_2=p'(1) \quad \varphi_3=p(0)$ con $p(x)=ax^2+bx+c$

$\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}$

$p(x)\mapsto p'(x)$

• Dimostrare che $\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\}$ definisce una base di $(\mathbb{R}_2[x])^*$

$\varphi_1(p(x))=\int_0^1(ax^2+bx+c)\,dx=\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right]_0^1=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c$;

$\cancel{\varphi_1(x^2)=\frac{1}{3},\ \varphi_1(x)=\frac{1}{2},\ \varphi_1(1)=0}$

$\cancel{\varphi_2(x^2)=2,\ \varphi_2(x)=1,\ \varphi_2(1)=0}$

$\cancel{\varphi_3(x^2)=0,\ \varphi_3(x)=0,\ \varphi_3(1)=1}$

$\varphi_2(p(x))=2ax+b\Big|_{x=1}=2a+b$;

$\varphi_3(p(x))=p(0)=c \implies$

(*) Dimostrare che: $\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2+\lambda_3\varphi_3=0 \implies \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0 \implies$

$\lambda_1\int_0^1 p(x)\,dx+\lambda_2 p'(1)+\lambda_3 p(0)=0 \implies \lambda_1\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c\right)+\lambda_2(2a+b)+c=0 \quad \forall a,b,c\in\mathbb{R}$

E QUINDI $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$. [AD ESEMPIO SE PRENDO $a=c=0$ E $b=1$, CIOÈ:

1) $p(x)=x \implies$ (*) DIVENTA: $\boxed{\frac{\lambda_1}{2}+\lambda_2=0}$; PER $a=1$, $b=c=0$ (*) DIVENTA $\boxed{\lambda_1/3+2\lambda_2}=0$; PER $c=1$ $a=b=0$ (*) DIVENTA $\boxed{\lambda_3=0}$

$$\begin{aligned}
p(x)&=(x^2)\to \frac{\lambda_1}{3}+2\lambda_2=0\\
p(x)&=(x)\to \frac{\lambda_1}{2}+\lambda_2=0\\
p(x)&=(1)\to \lambda_3=0
\end{aligned}
\implies A=\begin{pmatrix}1/3 & 2 & 0\\ 1/2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$rg\,A=3$, $\dim V=3$

Vettori linearmente indipendenti $\implies$

$\implies$ L'UNICA SOLUZIONE È QUELLA NULLA $\implies \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$]

• Determinare la base duale di $\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\}$ $\longrightarrow$ CIOÈ $\psi_1,\psi_2,\psi_3\in\mathbb{R}_2[x]$

TALI CHE $\varphi_i(v)=\begin{cases}1 & v=\psi_i\\ 0 & v\neq\psi_j\ \ j\neq i\end{cases}$

POSTO:

$\psi_1=ax^2+bx+c$

$$\begin{cases}\varphi_1(\psi_1)=\int_0^1(ax^2+bx+c)\,dx=1 \implies \frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c=1\\ \varphi_2(\psi_1)=2a+b=0\\ \varphi_3(\psi_1)=c=0\end{cases}\implies\begin{cases}a=-\frac{3}{2}\\ b=3\\ c=0\end{cases}$$

$\boxed{\psi_1=-\frac{3}{2}x^2+3x}$

CERCO ORA $\psi_2=ax^2+bx+c$ TALE CHE:

$$\begin{cases}\varphi_1(\psi_2): \frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c=0\\ \varphi_2(\psi_2): 2a+b=1\\ \varphi_3(\psi_2): c=0\end{cases}\implies\begin{cases}a=\frac{3}{4}\\ b=-\frac{1}{2}\\ c=0\end{cases}$$

$\boxed{\psi_2=\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{2}x}$

CERCO ORA $\psi_3=ax^2+bx+c$ TALE CHE:

$$\begin{cases}\varphi_1(\psi_3): \frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c=0\\ \varphi_2(\psi_3): 2a+b=0\\ \varphi_3(\psi_3): c=1\end{cases}\implies\begin{cases}a=3/2\\ b=-3\\ c=1\end{cases}$$

$\boxed{\psi_3=\frac{3}{2}x^2-3x+1}$

ψ_1,ψ_2,ψ_3 danno la base duale

Sia V uno spazio vettoriale sul campo K, $\dim V = n$, definiamo forma bilineare su V, una forma $F: V \times V \longrightarrow K$

$$(v, w) \longmapsto F((v, w))$$

tale che:
$$\begin{cases} F((v_1+v_2, w)) = F((v_1, w)) + F((v_2, w)) & \forall v_1, v_2, w, v \in V \\ F((\alpha v, w)) = \alpha F((v, w)) & \forall \alpha \in K \end{cases}$$

e
$$\begin{cases} F((v, w_1 + w_2)) = F((v, w_1)) + F((v, w_2)) & \forall v, w_1, w_2, w \in K \\ F((v, \beta w)) = \beta (F((v, w)) & \forall \beta \in K \end{cases}$$

deve essere lineare separatamente per ogni componente

Esempio: $F: \mathbb{R}^2_{(\mathbb{R}\times\mathbb{R})} \longrightarrow \mathbb{R}$ è bilineare?

$$(x, y) \longmapsto xy$$

Oppure

Dimostrare che $F((\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w)) = \alpha_1 F((v_1, w)) + \alpha_2 F((v_2, w))$
e $F((v, \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2)) = \beta_1 F((v, w_1)) + \beta_2 F((v, w_2))$

1) $F((x_1 + x_2, y)) = (x_1 + x_2) y = x_1 y + x_2 y = F((x_1, y)) + F((x_2, y))$
$F((\alpha x, y)) = (\alpha x) y = \alpha x y = \alpha (xy) = \alpha F((x, y))$
è lineare sulla prima componente

2) $F((x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2)) = x(\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) = x\beta_1 y_1 + x\beta_2 y_2 = \beta_1(xy_1) + \beta_2(xy_2) =$
$= \beta_1 F((x, y_1)) + \beta_2 F((x, y_2))$
è lineare sulla seconda componente
$\Rightarrow$ è una forma bilineare da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$

- Una forma bilineare è anche lineare?

In generale no! CONTROESEMPIO: ~~esatto~~ esempio precedente
$F(v_1 + v_2) = F(v_1) + F(v_2)$ prendo $v_1 = (x_1, y_1)$, $v_2 = (x_2, y_2) \Rightarrow$
$\Rightarrow F(v_1 + v_2) = F((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = F((x_1 + x_2, y_1 + y_2)) = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) =$
$= x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2$
$F(v_1) + F(v_2) = F((x_1, y_1)) + F((x_2, y_2)) = x_1 y_1 + x_2 y_2$
Non è lineare.

Fissiamo una base $B_V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \Rightarrow$ data $F: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ forma bilineare cerco $F((v, w))$ con $v, w \in V$. Cerco tramite le coordinate DEI VETTORI nella base data.

$\Rightarrow v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$, $w = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n \Rightarrow$

$\Rightarrow F((v, w)) = F((\sum_{i=1}^n a_i v_i, \sum_{j=1}^n b_j v_j)) = \sum_{i=1}^n a_i F((v_i, \sum_{j=1}^n b_j v_j)) =$

$= \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^n F((v_i, v_j)) = a_1 [b_1 F((v_1, v_1)) + b_2 F((v_1, v_2)) + \dots + b_n F((v_1, v_n))] + a_2 [b_1 F((v_2, v_1))$
$+ b_2 F((v_2, v_2)) + \dots + b_n F((v_2, v_n))] + \dots + a_n [b_1 F((v_n, v_1)) + b_2 F((v_n, v_2)) + \dots + b_n F((v_n, v_n))]$

$= a_1 b_1 F((v_1, v_1)) + a_1 b_2 F((v_1, v_2)) + \dots + a_1 b_n F((v_1, v_n)) + a_2 b_1 F((v_2, v_1)) + a_2 b_2 F((v_2, v_2)) +$
$+ a_2 b_n F((v_2, v_n)) + \dots + a_n b_1 F((v_n, v_1)) + a_n b_2 F((v_n, v_2)) + \dots + a_n b_n F((v_n, v_n))$

Immagini sono scalari → sono forme. Cerco $F((v,w))$ E DIMOSTRO CHE,
se pongo $X = [v]_{B_V} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_{n\times 1}$ e $Y = [w]_{B_V} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}_{n\times 1}$ e

$$[F]_{B_V} = \begin{pmatrix} F((v_1,v_1)) & F((v_1,v_2)) & \dots & F((v_1,v_n)) \\ F((v_2,v_1)) & F((v_2,v_2)) & \dots & F((v_2,v_n)) \\ \vdots & & & \vdots \\ F((v_n,v_1)) & F((v_n,v_2)) & \dots & F((v_n,v_n)) \end{pmatrix}_{n\times n}$$

Entrate sono immagini delle coppie dei vettori di base

$$\Rightarrow \boxed{F((v,w)) = \text{è un numero} = X^T \cdot [F]_{B_V} \cdot Y}$$

Esempio $\quad F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

Fissata in $\mathbb{R}^2$ la base $\mathcal{E}$ $\quad \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \longmapsto x_1x_2 + y_1y_2$

$$[F]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} F((e_1,e_1)) & F((e_1,e_2)) \\ F((e_2,e_1)) & F((e_2,e_2)) \end{pmatrix}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X^T \cdot [F]_{\mathcal{E}} \cdot Y = (x_1, y_1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1, y_1)\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1x_2 + y_1y_2$$

QUESTA E' LA
somma dei prodotti delle componenti omonime = prodotto scalare (CHE QUINDI E' forma bilineare)

$F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad$ Fissata in $\mathbb{R}_2$ la base $\mathcal{E}$ $\Rightarrow$

$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \longmapsto x_1y_2 - y_1x_2$

$$[F]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$