17/10/2017

Def Spazio Somma

DATI $U, W < V \Rightarrow U + W = \{ u + w \mid u \in U \text{ e } w \in W \}$

Def DATO $U < V$ V SPAZIO ~~VETTORIALE~~ VETTORIALE n-DIMENSIONALE $\Rightarrow$ UN SOTTOSPAZIO $W < V$ È DETTO COMPLEMENTARE DI U SE $U \oplus W = V$

Es SE $U = \pi$ (PIANO DI $\mathbb{R}^3$) AD ESEMPIO: $x + y + z = 0$ (IL NUMERO DI ~~...~~ SUA DIMENSIONE (L'EQUAZIONE PER UN PIANO IN $\mathbb{R}^3$ DERIVA DALLA ~~...~~ COME SPAZIO DELLE SOLUZIONI DI UN SISTEMA)

CERCO $W \mid U \oplus W = \mathbb{R}^3$ STO CERCANDO UN ~~SOTT~~ SOTTOSPAZIO CHE SOMMATO AD UN PIANO MI DIA $\mathbb{R}^3$; QUINDI CERCO UNA RETTA (SPAZIO DI DIMENSIONE 1) PERCHÉ PER IL TEO. DI Grassmann: $\dim U \oplus W + \dim \pi \cap W = \dim \pi + \dim W$

$$\Rightarrow \dim W = \underset{3}{\dim \pi \oplus W} + \underset{0}{\dim \pi \cap W} - \underset{2}{\dim \pi} = 1$$

~~SOL~~ **Sol** PRENDO VETTORI DI BASE DEL π : CERCO UNA BASE DI $x = -y - z$

x	y	z
-1	0	1
-1	1	0
$-1-\lambda$	1	λ

$B_\pi = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases}$ EQUAZ. PARAMETRICA

$\pi: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ EQ. VETTORIALE.

CERCO UN VETTORE LINEARMENTE INDIPENDENTE ALTRI DELLA ~~DAGLI~~ BASE

Es: $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ CONTROPROVA $\begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -1 \cancel{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}} + 1 - 4 = -7 \neq 0 \Rightarrow$

$\{v_1\}$ è BASE DI W.

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -3\lambda \end{cases}$ EQ. PARAMETRICA $\Rightarrow \begin{cases} x = -2y \\ z = -3y \end{cases}$ EQ. CARTES.

~~Es~~ SIANO $U = \langle\langle u_1, \dots, u_k \rangle\rangle$ E $W = \langle\langle w_1, \dots, w_m \rangle\rangle$

CERCO $U \cap W$ ~~...~~ SUPPONIAMO CHE $\dim V = n$ (V SPAZIO AMBIENTE)

$\Rightarrow$ DETERMINO UNA MATRICE $A \in M_{n \times (k+m)}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} [u_1]_{BV} & \dots & [u_k]_{BV} & [w_1]_{BV} & \dots & [w_m]_{BV} \\ | & & | & | & & | \end{pmatrix}_{n \times (k+m)}$$

$\boxed{\text{OSSERVO } \operatorname{rg} A = \dim U + W}$

PER DETERMINARE I VETTORI DI BASE DI U+W RIDUCO A GRADINI LA MATRICE A e DETERMINO LE COLONNE LINEARMENTE INDIPENDENTI (I VETTORI ANDRANNO PRESI DALLA MATRICE ORIGINARIA NON IN FORMA CANONICA) QUELLE CORRISPONDENTI IN A DARANNO LE COORDINATE DEI VETTORI DI BASE DI U+W

(2)

SE RIDUCO LA MATRICE A GRADINI IN FORMA CANONICA ALLORA AL TERMINE DEL PROCEDIMENTO GIUNGO AD UNA MATRICE DEL TIPO: SUPPOSTO, QUELLE DATE COME BASI DI U e W ⇒

IN QUESTO PARTICOLARE CASO HO TROVATO k+2 VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI QUINDI $\dim U+W = k+2$

SE SOMMA È DIRETTA TROVO TUTTI VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI (PERCHÉ PARTO DA BASI)

$\Rightarrow B_{U+W} = \{u_1, \dots, u_k, w_2, w_1\}$ INOLTRE

$f_1 = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_m e_m$

$f_2 = b_1 e_1 + \dots + b_{m+1} e_{m+1}$

$f_3 = c_1 e_1 + \dots + c_{m+1} e_{m+1}$

$f_4 = d_1 e_1 + \dots + d_m e_m + d_{m+1} e_{m+1} + d_{m+2} e_{m+2}$

PER I VETTORI COLONNA LINEARM. DIPENDENTI NELLA MATRICE IN FORMA CANONICA

NELLA MATRICE INIZIALE A:

$w_1 = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_m u_k$

$w_3 = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \dots + b_m u_m + b_{m+1} w_2$

$w_4 = c_1 u_1 + \dots + c_m u_m + c_{m+1} w_2$

$w_5 = d_1 u_1 + \dots + d_m u_m + d_{m+1} w_2 + d_{m+2} w_4$

$\vdots$

$\{a_i\}_{i=1\dots m} = \{a_i\}_{i=1\dots m}$

I COEFFICIENTI DELLE EQUAZIONI NEI DUE SISTEMI SONO UGUALI

SE PORTO AD UN MEMBRO I VETTORI DI UNO STESSO SOTTOSPAZIO:

$$\begin{cases} w_1 = a_1 u_1 + \dots + a_m u_m \\ w_3 - b_{m+1} w_2 = b_1 u_1 + \dots + b_m u_m \\ w_4 - c_{m+1} w_2 = c_1 u_1 + \dots + c_m u_m \\ w_5 - d_{m+1} w_2 - d_{m+2} w_4 = d_1 u_1 + \dots + d_m u_m \end{cases} \Rightarrow$$

A PRIMO E SECONDO MEMBRO HO VETTORI DELL'INTERSEZIONE PERCHÉ STANNO SIA IN U CHE IN W

ES: E_1

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & -2 & 1 & \sqrt{2} \\ 3 & 8 & -3 & 1 & -1 \\ 4 & 9 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 10 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

u_1, u_2, w_1, w_2, w_3

U W $U+W$

$U \cap W$?

RIDOTTA IN FORMA CANONICA

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}\right)$$

$W+U = \langle\langle u_1, u_2, u_3 \rangle\rangle$

$U \cap W = \langle\langle u_1 + 2w_2 ; -u_1 - 3u_2 \rangle\rangle$

Dim TEOREMA ROUCHÉ-CAPELLI

Sia $\boxed{\Sigma : AX = B}$ un sistema lineare non omogeneo di p equazioni in n incognite $\Rightarrow A \in M_{p \times n}$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$

NON SEMPRE Σ HA SOLUZIONE.

TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI

Σ HA SOLUZIONE $\Leftrightarrow rg\, A = rg(A;B)$

Dim Σ PUÒ ESSERE RISCRITTO COSÌ: DETTE

$C_j(A)$, $j = 1, \dots, n$ LE COLONNE DI $A \Rightarrow$

$\Rightarrow \Sigma : x_1 C_1(A) + x_2 C_2(A) + \dots + x_n C_n(A) = B$

INFATTI: AD ESEMPIO:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{4\times 3} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{4 \times 1} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 1 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 1 \\ -x_1 + 0x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ 4x_1 \\ 7x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 4x_2 \\ 8x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3x_3 \\ 6x_3 \\ 9x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

"⇒" Σ HA SOLUZIONE ⇒ $\exists (\alpha_1; \dots; \alpha_m) \in \mathbb{R}^n$ ④

TALE CHE $\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \dots + \alpha_m C_N = B$

⇒ $B \in \langle\langle C_1, \dots, C_m \rangle\rangle$ B È LINEARMENTE DIPENDENTE

CON $C_1, \dots, C_N$ QUINDI IL RANGO DI $(A;B)$ NON

AUMENTA RISPETTO QUELLO DI A PERCHÉ AGGIUNGO UNA

COLONNA LINEARMENTE DIPENDENTE

"⇐" VICEVERSA SI RIPERCORRE IL RAGIONAMENTO DALLA

FINE SE $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A;B)$ ⇒ B LINEARMENTE DIPENDENTE...

CVD

INOLTRE LE SOLUZIONI DI Σ SONO $\infty^{n - \operatorname{rg} A}$