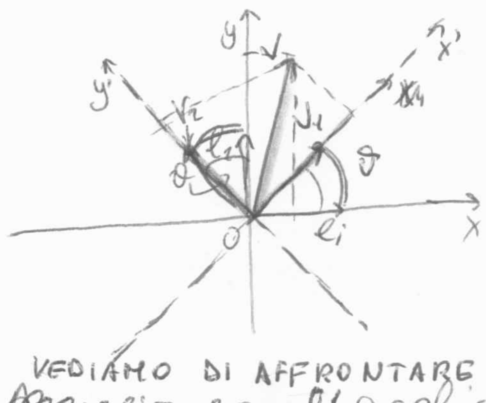
Matrice del cambiamento di base passando da $\mathcal{E}_{\mathbb{R}^2}$ di e_1, e_2 a $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$, con $\mathcal{B}$ ottenuta con una rotazione antioraria di un angolo ϑ

$0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ (Ricordo che la nostra matrice associata ALLA ROTAZIONE ANTIORARIA DI ϑ, ρ_ϑ:

$$[\rho_\vartheta]_{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^2}}^{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^2}} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix})$$



Cerchiamo coordinate dei vettori rispetto $\mathcal{B}$.

VEDIAMO DI AFFRONTARE IL PROBLEMA CONSIDERANDO ~~…~~ l'applicazione lineare $id : (\mathbb{R}^2, \mathcal{E}_{\mathbb{R}^2}) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \mathcal{B})$, l'Appl. line. identità, perché non cambia il vettore, ma le coordinate con cui il vettore viene espresso nella nuova base

$$id . (\mathbb{R}^2, \mathcal{E}_{\mathbb{R}^2}) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \mathcal{B})$$
$$v \longmapsto v$$

$\boxed{id(v) = v}$; $\Rightarrow$ CONSIDERIAMO I VETTORI DELLE COORDINATE E LA MATRICE ASSOCIATA ALL'APPLICAZIONE id:

$$[v]_{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^2}};\ [id]_{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^2}}^{\mathcal{B}};\ \underset{\substack{\| \\ [v]_{\mathcal{B}}}}{[id(v)]_{\mathcal{B}}} \Longrightarrow [v]_{\mathcal{B}} = [id]_{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^2}}^{\mathcal{B}} \cdot [v]_{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^2}}$$

matrice cambiamento di base

Esprimere vettori di base nelle nuove coordinate: (a_1, a_2):

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow [id]_{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^2}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

(2)

$\Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} -\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1 = a_1\cos\vartheta - a_2\sin\vartheta \\ 0 = a_1\sin\vartheta + a_2\cos\vartheta \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 1 = \dfrac{-a_2\cos\vartheta\cos\vartheta - \sin\vartheta\, a_2\sin^2\vartheta}{\sin\vartheta} \\ a_1 = \dfrac{-a_2\cos\vartheta}{\sin\vartheta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \dfrac{-a_2}{\sin\vartheta} \\ \text{"} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = -\sin\vartheta \\ a_1 = \cos\vartheta \end{cases}$

prima colonna

POI CONSIDERIAMO ;

$\begin{cases} 0 = b_1\cos\vartheta - b_2\sin\vartheta \\ 1 = b_1\sin\vartheta + b_2\cos\vartheta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = \dfrac{b_2\sin\vartheta}{\cos\vartheta} \\ 1 = \dfrac{b_2\sin^2\vartheta + b_2\cos^2\vartheta}{\cos\vartheta} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} b_1 = \sin\vartheta \\ b_2 = \cos\vartheta \end{cases} \Rightarrow [id]^{B}_{e_{\mathbb{R}^2}} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$

Se considero l'applicazione lineare (ROTAZIONE), il vettore cambia, se invece considero l'identità no: CAMBIA IL SISTEMA DI RIFERIMENTO

Ricordo che la composizione ~~lineare~~ di funzioni lineari dà ancora una funzione lineare e fissate le basi negli spazi $[L_2 \circ L_1] = [L_2] \cdot [L_1]$

Se $L: V \to W$ è applic. lineare biettiva $\Rightarrow L$ è invertibile e la sua inversa L^{-1} è ancora lineare. $\Rightarrow$ cerco la matrice associata alla L^{-1} nelle basi fissate: prese B_V e B_W basi in V e W rispettivamente $\Rightarrow$ per definizione di funzione inversa: $L^{-1} \circ L = id_V: V \to V \quad L \circ L^{-1} = id_W : W \to W$

$\Rightarrow [L^{-1} \circ L]^{B_V}_{B_V} = [id_V]^{B_V}_{B_V} = I$

$[L^{-1}]^{B_V}_{B_W} \cdot [L]^{B_W}_{B_V} = I$

e analogamente $\left[L \circ L^{-1}\right]_{B_W}^{B_W} = \left[id_W\right]_{B_W}^{B_W} = I$

$$\left[L\right]_{B_V}^{B_W} \cdot \left[L^{-1}\right]_{B_W}^{B_V} = I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[L^{-1}\right]_{B_W}^{B_V} = \left(\left[L\right]_{B_V}^{B_W}\right)^{-1}$$

la matrice associata all'applicazione inversa di L è la matrice inversa alla matrice associata all'applicazione L.

- ~~DA MATRICE AD APPLICAZIONE~~

Sia $A \in M_{p \times n}^{\mathbb{R}}$ $\Rightarrow$ posso costruire un'appl. lineare $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $v \longmapsto L(v)$ considero fissate delle basi negli spazi dominio e codominio $B_{\mathbb{R}^n}$ e $B_{\mathbb{R}^p}$ $\Rightarrow$ pongo $\boxed{[L(v)]_{B_{\mathbb{R}^p}} = A \cdot [v]_{B_{\mathbb{R}^n}}}$

L è lineare? (sì, da fare come esercizio: DIMOSTRARE CHE:

$\boxed{L(a_1 v_1 + a_2 v_2) = a_1 L(v_1) + a_2 L(v_2)}$)

$A \longmapsto L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p \mid [L(v)] = A[v]$

PERTANTO:

$\Rightarrow$ Posso dare l'applicazione $\mathcal{L}: M_{p \times n} \longrightarrow Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, fissate le basi $B_{\mathbb{R}^n}$ e $B_{\mathbb{R}^p}$ NEGLI SPAZI VETTORIALI

1) $\mathcal{L}$ è un morfismo (è lineare): $\mathcal{L}(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2) = \alpha_1 \mathcal{L}(A_1) + \alpha_2 \mathcal{L}(A_2)$

2) $\mathcal{L}$ è un isomorfismo (applicazione lineare biettiva, E QUINDI è invertibile) (da dimostrare) $[\mathcal{L}^{-1}: Hom \to M_{p \times n}$ E $\mathcal{L}^{-1}(L) = [L]_{B_{\mathbb{R}^n}}^{B_{\mathbb{R}^p}}$

Isomorfismo non canonico perché dipende dalle basi fissate (cambiando base ho un altro isomorfismo)!

I DUE SPAZI SI POSSONO DUNQUE IDENTIFICARE!

Sia $L: (V; B_V^1) \longrightarrow (W; B_W^1)$ $\Rightarrow$ ad essa è associata una matrice $[L]_{B_V^1}^{B_W^1}$

cambio le basi $L: (V; B_V^2) \longrightarrow (W; B_W^2) \Rightarrow$

[SI NOTI CHE l'appl. L esiste indipendentemente dalle basi]

$\Rightarrow$ ad L è associata un'altra matrice $[L]_{B_V^2}^{B_W^2}$

$$\begin{tikzcd} L:(V;B^1_V) \arrow[r, "L"] & (W;B^1_W) \arrow[d, "id_W"] \\ L:(V;B^2_V) \arrow[u, "id_V"] \arrow[r, "L"] & (W;B^2_W) \end{tikzcd}$$

$$v \mapsto v \mapsto L(v) \mapsto L(v)$$

$$v \longmapsto L(v)$$

$$L(v) = (id_W \circ L \circ id_V)(v)$$

INFATTI: $id_W(L(id_V(v))) = id_W(L(v)) = L(v)$

DIAGRAMMA COMMUTATIVO

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "l"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "h"'] & D \end{tikzcd}$$

↳ commuta quando voglio tornando al punto di partenza SEGUENDO LE FRECCE A PARTIRE DA UNO SPAZIO QUALUNQUE

A livello di matrici $[L]^{B^2_W}_{B^2_V} = \underset{\text{la cerco}}{[id]^{B^1_V}_{B^2_V}} \cdot \underset{A \text{ data}}{[L]^{B^2_W}_{B^1_V}} \cdot \underset{\text{la cerco}}{[id_W]^{B^2_W}_{B^1_W}} =$

$= \text{trovo } [L]^{B^2_W}_{B^2_V}$

Caso particolare (con operatore T) PRENDENDO LA STESSA BASE NEL DOMINIO E NEL CODOMINIO.

$$\begin{tikzcd} (V,B_1) \arrow[r, "T"] & (V,B_1) \arrow[d, "id_V"] \\ (V,B_2) \arrow[u, "id_V"] \arrow[r, "T"] & (V,B_2) \end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow \underset{B}{[T]_{B_2}} = \underset{S^{-1}}{[id_V]^{B_1}_{B_2}} \cdot \underset{A}{[T]_{B_1}} \cdot \underset{S}{[id]^{B_2}_{B_1}}$$

S: • quadrata: $S \in M_{n\times n}$ se $\dim V = n$

è matrice ~~...~~, ha rango massimo (~~...~~ IMMAGINI DEI VETTORI DI BASE: sono ancora lin. indipendenti PERCHE' L'IDENTITA' NON LI CAMBIA!) Ha $\det \neq 0 \Rightarrow$ invertibile

$[id_V]^{B_1}_{B_2} = S^{-1}$

~~...~~ DEFINIZIONE: Due matrici quadrate A e B si dicono $\boxed{\text{SIMILI}}$ se $\exists$ una matrice invertibile S tale che $B = S^{-1} \cdot A \cdot S$

OSSERVAZIONE: La relazione di similitudine è ~~...~~ di equivalenza (ESERCIZIO) (riflessiva, simmetrica, transitiva)

- simmetrica

$B = S^{-1}AS \Rightarrow A = T^{-1}BT$

$SBS^{-1} = \underbrace{SS^{-1}}_{I} A \underbrace{SS^{-1}}_{I} = A \Rightarrow$ BASTA PRENDERE $T = S^{-1}$ e $T^{-1} = S$

$\boxed{\text{OSSERVAZIONE}}$

Matrici associate allo stesso operatore in basi diverse sono SIMILI

- CORRISPONDENZA TRA OPERATORI E CLASSI DI EQUIVALENZA DI MATRICI SIMILI:

Ogni operatore individua (ed è a sua volta individuato da) UNA classe di equivalenza di matrici simili.