DATA UNA MATRICE $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ E FISSATA UNA BASE IN UNO SPAZIO VETTORIALE V, n-DIMENSIONALE POSSIAMO ASSOCIARE AD A UNA FORMA BILINEARE $F: V \times V \to \mathbb{R}$ IN QUESTO MODO:

DATI $v, w \in V$: $F((v,w)) = [v]_B^T \cdot A \cdot [w]_B$ (ESERCIZIO: DIMOSTRARE CHE F È BILINEARE)

QUINDI POSSIAMO DARE UN'APPLICAZIONE $\varphi \in \{\text{FORME BILINEARI SU } V\} \to M_{n\times n}$

QUESTA APPLICAZIONE È BIETTIVA (DA DIMOSTRARE) $F \to [F]_B$ FISSATA LA BASE B_V

SI PUÒ SCRIVERE LA FORMULAZIONE ANALITICA, MEDIANTE LE COORDINATE DI V, PER $F((v,w))$ A PARTIRE DA $[v]_B^T A [w]_B$ SOLO SE LA BASE DI V SCELTA È QUELLA CANONICA

- SE CAMBIAMO LA BASE DI V OTTENIAMO UNA MATRICE B, ASSOCIATA ALLA STESSA $F((v,w))$ $B \neq A$: CHE LEGAME C'È TRA MATRICI ASSOCIATE ALLA STESSA FORMA BILINEARE F IN BASI DIVERSE?

SIANO B_1 E B_2 BASI DI $V \Rightarrow$ PRESI $v, w \in V \Rightarrow [v]_{B_1} = X_1$, $[v]_{B_2} = X_2$, $[w]_{B_1} = Y_1$, $[w]_{B_2} = Y_2$, $[F]_{B_1} = A$, $[F]_{B_2} = B$

$$F((v,w)) = X_1^T A Y_1 \; ; \; F((v,w)) = X_2^T B Y_2$$

X_1 E X_2, Y_1 E Y_2 SONO LEGATI DAL CAMBIAMENTO DI BASE.
SIA S LA MATRICE DEL CAMBIAMENTO DI BASE $\Rightarrow X_2 = S X_1$, $Y_2 = S Y_1$
($S = [id]_{B_1}^{B_2}$, S È INVERTIBILE)

$$\Downarrow$$

$$F((v,w)) = X_2^T B Y_2 = (S X_1)^T B (S Y_1) = X_1^T S^T B S Y_1 = X_1^T (S^T B S) Y_1 = X_1^T A Y_1 \quad \forall v, w \in V$$

$\Rightarrow$ PERCHÉ L'UGUAGLIANZA SIA VERA $\underbrace{}_{\forall v, w \in V}$: $\boxed{A = S^T B S}$ $\to$ LEGAME TRA LE DUE MATRICI ASSOCIATE ALLA STESSA F IN BASI DIVERSE

A E B SI DICONO <u>CONGRUENTI</u> SE $\exists\, S$ INVERTIBILE $|\, A = S^T B S$

- LA CONGRUENZA È UNA RELAZIONE DI EQUIVALENZA (DA DIMOSTRARE, DEVE VALERE PROPRIETÀ SIMMETRICA, RIFLESSIVA E TRANSITIVA)

<u>SIMBOLO</u>: $A \sim_c B$ (A CONGRUENTE A B)

- SE $A \sim_c B \Rightarrow \exists\, S$ INVERTIBILE $|\, A = S^T B S \Rightarrow |A| = |S^T B S| = |S^T||B||S| = |S|^2 |B|$
- SE $A \sim_c B \Rightarrow rg A = rg B$

$\Downarrow$

IL DETERMINANTE NON È INVARIANTE PER LA CONGRUENZA, MA IL RANGO SI

(MATRICE ORTOGONALE: MATRICE TALE CHE $A^T = A^{-1}$) ②

DIMOSTRAZIONE DELLA PROPRIETÀ SIMMETRICA DELLA CONGRUENZA:

$A = S^T B S$ ~~...~~

$\Rightarrow (S^T)^{-1} A = (S^T)^{-1} S^T B S \Rightarrow (S^T)^{-1} A S^{-1} = (S^T)^{-1} S^T B S S^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow B = (S^T)^{-1} A S^{-1}$; È VERO CHE $(S^T)^{-1} = (S^{-1})^T$?

(DA DIMOSTRARE)

- UNA FORMA BILINEARE È DETTA SIMMETRICA SE $F((v,w)) = F((w,v))$ $\forall v, w \in V \Rightarrow$

$\Rightarrow$ FISSATA UNA BASE B_V, $[F]_{B_V}$ È SIMMETRICA SE F È SIMMETRICA.

SE $B_V = \{v_1, \dots, v_n\} \Rightarrow [F]_{B_V} = \begin{pmatrix} F((v_1,v_1)) & F((v_1,v_2)) & F((v_1,v_3)) \\ F((v_2,v_1)) & \cdot & \\ F((v_3,v_1)) & & \cdot \end{pmatrix}$

SE F È SIMMETRICA SONO UGUALI

- F È ANTISIMMETRICA SE $F((v,w)) = -F((w,v))$ $\forall v, w \in V \Rightarrow$

$\Rightarrow [F]_{B_V}$ È ANTISIMMETRICA

- F È ALTERNANTE SE $F((v,v)) = 0$ $\forall v \in V$

(SE SIAMO IN $\mathbb{R}$ OGNI FORMA ANTISIMMETRICA È ALTERNANTE E VICEVERSA)

SE $K = \mathbb{R} \Rightarrow$ F È ANTISIMMETRICA $\Rightarrow$ È ALTERNANTE, INFATTI:

$F((v,w)) = -F((w,v)) \Rightarrow F((v,v)) = -F((v,v)) \Rightarrow F((v,v)) = 0$ $\forall v$

- SIA F UNA FORMA BILINEARE SIMMETRICA SU V $\Rightarrow$ $v, w \in V$ SONO DETTI F-CONIUGATI SE $F((v,w)) = F((w,v)) = 0$ (CASO BANALE: SE $v = 0 \Rightarrow$ v È F-CONIUGATO AD OGNI $w \in V$)

CERCO SOLO I VETTORI F-CONIUGATI NON NULLI

ESCLUDIAMO IL CASO BANALE

$\Downarrow$

$v \neq 0 \wedge w \neq 0$

FISSATO $v \in V \wedge v \neq 0 \Rightarrow$ POSSO DETERMINARE $\{w \in V \mid F((v,w)) = 0\} = v^{\perp}$

v ORTOGONALE

$v^{\perp} \leq V$? $\Rightarrow$ • LO 0 VIENE AGGIUNTO

• $\forall w_1, w_2 \in v^{\perp}$, $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \in v^{\perp}$? $\Rightarrow F((v, \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2)) = 0$?

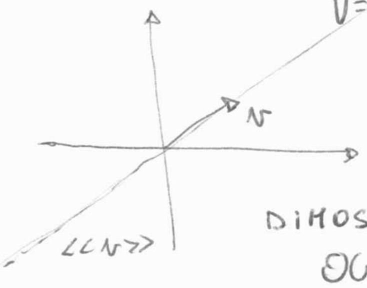
$\Rightarrow$ SICCOME F È BILINEARE $\Rightarrow F((v, \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2)) = \alpha_1 F((v_1, w_1)) + \alpha_2 F((v_1, w_2))$

PERCHÉ $w_1, w_2 \in v^{\perp}$ $\underset{0}{\Downarrow}$ $\underset{0}{\Downarrow}$

SI VEDE FACILMENTE CHE $\langle\langle v \rangle\rangle^{\perp} = v^{\perp}$

$\langle\langle v \rangle\rangle^{\perp} = \{ w \in V \mid F((u,w))=0 \ \forall u \in \langle\langle v \rangle\rangle \}$

$V=\mathbb{R}^2$



$v^{\perp} = \{$VETTORI F-CONIUGATI A $v\}$

$\langle\langle v \rangle\rangle^{\perp} = \{$VETTORI F-CONIUGATI A TUTTI I VETTORI DELLO SPAZIO $\langle\langle v \rangle\rangle \}$

DIMOSTRIAMO CHE $v^{\perp} = \langle\langle v \rangle\rangle^{\perp}$:

OGNI $u \in \langle\langle v \rangle\rangle$ È DEL TIPO $u = \alpha v$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

DIMOSTRIAMO CHE $v^{\perp} \subset \langle\langle v \rangle\rangle^{\perp}$:

SE $w \in v^{\perp} \Rightarrow f((v,w))=0 \Rightarrow w \in \langle\langle v \rangle\rangle^{\perp}$, INFATTI

SE $u \in \langle\langle v \rangle\rangle$, $\exists \alpha \mid u = \alpha v \Rightarrow F((u,w)) = F((\alpha v, w)) =$

$= \alpha F((v,w)) = 0 \Rightarrow w$ È F-CONIUGATO AD OGNI VETTORE DI $\langle\langle v \rangle\rangle \Rightarrow w \in \langle\langle v \rangle\rangle^{\perp}$.

LA DIMOSTRAZIONE DI $\langle\langle v \rangle\rangle^{\perp} \subset v^{\perp}$ È BANALE $\Rightarrow \langle\langle v \rangle\rangle^{\perp} = v^{\perp}$ c.v.d

DATO $U \subseteq V \Rightarrow U^{\perp} = \{ w \in V \mid F((u,w))=0 \ \forall u \in U \}$; $U^{\perp}$ SI LEGGE $\boxed{U \text{ F-ORTOGONALE}}$

PER DETERMINARE $U^{\perp}$ È SUFFICIENTE TROVARE I VETTORI F-ORTOGONALI AI VETTORI DI UNA BASE DI U

ESEMPIO:

1- $F: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad [F]_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$\left(\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}}_{X_1} ; \underbrace{\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}}_{X_2} \right) \to \ \ldots \ x_1x_2 + y_1x_2 - z_1x_2 + x_1y_2 + 2y_1y_2 - x_1z_2 + 3z_1z_2$$

$$F((X_1, X_2)) = X_1^T [F]_e X_2 = (x_1, y_1, z_1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(x_1 + y_1 - z_1, \ x_1 + 2y_1, \ -x_1 + 3z_1 \right) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} =$$

$$= x_1x_2 + y_1x_2 - z_1x_2 + x_1y_2 + 2y_1y_2 - x_1z_2 + 3z_1z_2$$

CI SONO VETTORI F-CONIUGATI A $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$? I VETTORI CERCATI $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ VERIFICANO

$$F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) = 0 \Rightarrow x_2 + \cancel{x_2} - \cancel{x_2} + y_2 + 2y_2 - z_2 + 3z_2 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_2 + 3y_2 + 2z_2 = 0 \to \boxed{\text{PIANO IN } \mathbb{R}^3}$

2- CONSIDERO $\pi: -x + 2y - z = 0 \Rightarrow \pi^{\perp} = ?$ CERCO F-ORTOGONALI A $\pi \Rightarrow$ CERCO I VETTORI CHE SONO CONTEMPORANEAMENTE F-ORTOGONALI

AI VETTORI DI BASE; AD ESEMPIO a B_π $\Rightarrow$

$$B_\pi = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \text{CERCO I VETTORI } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} F\left(\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)\right) = 0 \\ F\left(\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + x + 2y + 2y - 2z = 0 \\ -x - x - y + z + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 4y - 2z = 0 \\ -2x - y + 4z = 0 \end{cases} = \pi^\perp \rightarrow \underline{\text{RETTA IN}}\ \mathbb{R}^3$$

<u>DEFINIZIONE</u>: $v \in V$, $v \neq 0$ È <u>F-ISOTROPO</u> SE $F((v,v)) = 0$

$\exists$ v F-ISOTROPI PER F DELL'ESERCIZIO PRECEDENTE?

(ESERCIZIO DA FARE!)