20/04/2015 1

# Trovare una BASE ORTOGONALE di uno SPAZIO EUCLIDEO

- Metodo matematico: TEOREMA DI ORTOGONALIZZAZIONE DI GRAM - SCHMIT

Dati $k$ vettori lin. INDIPENDENTI in uno spazio euclideo $n$-dimensionale, $v_1, v_2, \dots, v_k$ e definiti

$L_1 = \langle\langle v_1 \rangle\rangle$, $L_2 = \langle\langle v_1, v_2 \rangle\rangle, \dots, L_j = \langle\langle v_1, v_2, \dots, v_j \rangle\rangle,$

$, L_k = \langle\langle v_1, \dots, v_k \rangle\rangle$ (sottospazi generati dai vettori dati)

$\exists$ $k$ vettori $w_1, \dots, w_k$ ORTOGONALI a 2 a 2 che generano gli stessi SOTTOSPAZI nel senso che $L_j = \langle\langle w_1, \dots w_j \rangle\rangle, \forall j = 1, \dots k$

INOLTRE:

Se $z_1, \dots, z_k$ sono altri vettori che soddisfano la tesi sopra espressa $\Rightarrow z_j = \lambda_j w_j \quad \forall j = 1, \dots k$

## DIMOSTRAZIONE

OSS:

I sottospazi, $L_1 \subset L_2 \subset L_3 \subset \dots \subset L_k$, sono uno contenuto nell'altro.

DIMOSTRAZIONE COSTRUTTIVA

Prendiamo $w_1 = v_1 \Rightarrow \langle\langle v_1 \rangle\rangle = \langle\langle w_1 \rangle\rangle = L_1$

Dato $v_2$ lo decomponiamo nella somma

$v_2 = a_1 w_1 + h_1$ con $h_1 \in \langle\langle w_1 \rangle\rangle^\perp \Rightarrow$

pongo $w_2 = h_1 = v_2 - a_1 w_1$ :

Dimostriamo che $\langle\langle h_1; w_1 \rangle\rangle = \langle\langle v_1, v_2 \rangle\rangle = L_2$

Bisogna far vedere il doppio CONTENUTO per dimostrare che coincidono.

1) $\langle\langle v_1, v_2 \rangle\rangle \subset \langle\langle w_1, h_1 \rangle\rangle$ Basta far vedere che i due vettori di base $v_1$ e $v_2$ appartengono a $\langle\langle w_1, h_1 \rangle\rangle$

INFATTI:

$\Rightarrow v_1 \equiv w_1$ e $v_2$ è PROPRIO SCRITTO COME combinazione lineare DEI VETTORI $w_1$ E $h_1$ GENERATORI DEL sottospazio $\langle\langle w_1, h_1 \rangle\rangle$:

$v_2 = a_1 w_1 + h_1 \Rightarrow v_2 \in \langle\langle w_1; h_1 \rangle\rangle \Rightarrow L_2 \subset \langle\langle w_1, h_1 \rangle\rangle$

2) $\langle\langle w_1; h_1 \rangle\rangle \subset L_2 \Rightarrow w_1 \equiv v_1$, $h_1 = v_2 - a_1 w_1 \in L_2$

$\Rightarrow L_2 = \langle\langle w_1, h_1 \rangle\rangle = \langle\langle w_1, w_2 \rangle\rangle$ ESSENDO $w_2 := h_1$.

Considero poi $v_3$ e decompongo $v_3$ nella somma delle proiezioni ORTOGONALI su $L_2$ e $L_2^{\perp}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow v_3 = b_1 w_1 + b_2 w_2 + h_2$

$w_1$, $w_2$ e $h_2$ sono ortogonali fra loro PER COME SONO PRESI. $\Rightarrow$

Posso prendere $w_3 = h_2$: DIMOSTRIAMO $L_3 = \langle\langle w_1, w_2, w_3 \rangle\rangle$

DIMOSTRIAMO $L_3 \supset \langle\langle w_1, w_2, w_3 \rangle\rangle$:

Sappiamo già che $w_1$ e $w_2$ stanno in $L_3$, poiché

$L_2 = \langle\langle w_1, w_2 \rangle\rangle \subset L_3$

Ci basta dimostrare che $w_3 \in L_3$: . . . .

$\Rightarrow$ ora $w_3 = v_3 - b_1 w_1 - b_2 w_2 \in L_3$ $[w_3 = k_2]$

Inoltre $L_3 \subset \langle\langle w_1, w_2, w_3 \rangle\rangle$

È già chiaro che $v_1$ e $v_2$ stanno in $\langle\langle w_1, w_2, w_3 \rangle\rangle$, basta

far vedere che ~~$v_3 \in L_3$ infatti $v_3 - b_1$~~

$v_3 \in \langle\langle w_1, w_2, w_3 \rangle\rangle$ infatti $v_3 = b_1 w_1 + b_2 w_2 + w_3$

anch'esso appartiene a $\langle\langle w_1, w_2, w_3 \rangle\rangle$ perché comb. LINEARE dei vettori di base.

E quindi $v_3 \in \langle\langle w_1, w_2, w_3 \rangle\rangle \Rightarrow L_3 = \langle\langle w_1, w_2, w_3 \rangle\rangle$

e così via, fino a determinare tutti i vettori cercati

Questo è il metodo per trovare una base ORTOGONALE avendo già data una base qualunque NON ORTOGONALE.

---

ESEMPIO:

In $\mathbb{R}^3$ sia data $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Cerco $B_\perp$ mediante il metodo di ORTOGONALIZZAZIONE

$$w_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

decompongo $v_2$, $v_2 = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + h$ con $h \in \langle\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle\rangle^{\perp}$.

$$\Rightarrow v_2 - a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = h \Rightarrow$$

Prodotto scalare fra i due vettori deve essere NULLO

$[w_2 \cdot w_1 = 0]$

$$\Rightarrow \underbrace{\left( \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}_{w_2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -a \\ -2-a \\ 1-a \end{pmatrix}}_{w_2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -a - 2 - a + 1 - a = 0$$

$$-3a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} -a \\ -2-a \\ 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -5/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

Cerco $w_3 \Rightarrow v_3 = b_1 v_1 + b_2 v_2 + h_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = h_2$$

Prodotto scalare deve essere NULLO

$$\Rightarrow \begin{cases} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

[QUESTO perché ho UTILIZZATO LA BASE VECCHIA NON ORTOGONALE]

Se avessi scelto la base trovata ORTOGONALE $\Rightarrow$ potevo trovare il vettore mediante il coefficienti di FOURIER.

Continuo a risolvere il sistema sopra scritto

$$\Rightarrow \begin{cases} -3b_1 + b_2 = 0 \\ b_1 - 5b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_2 = 3b_1 \\ b_1 - 15b_1 = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_2 = 3/14 \\ b_1 = \frac{1}{14} \end{cases}$$

$$h_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} b_1 = 1/14 \\ b_2 = 3/14 \end{matrix}$$

$$w_3 = \begin{pmatrix} -15/14 \\ 5/14 \\ 10/14 \end{pmatrix}$$

$$B_\perp = \left\{ \underset{(w_1)}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} ; \underset{(w_2)}{\begin{pmatrix} 1/3 \\ -5/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}} ; \underset{(w_3)}{\begin{pmatrix} -15/14 \\ 5/14 \\ 10/14 \end{pmatrix}} \right\}$$

Questi vettori sono tutti ORTOGONALI TRA LORO.

Se vogliamo la base ORTONORMALE $\Rightarrow$ cerchiamo le norme dei vettori $w_1$, $w_2$ e $w_3$

$$\|w_1\| = \sqrt{3} \quad ; \quad \|w_2\| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{25}{9} + \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{42}{9}} = \frac{\sqrt{42}}{3}$$

$$\|w_3\| = \sqrt{\frac{(15)^2 + 25 + 100}{(14)^2}} = \sqrt{\frac{(15)^2 + 125}{(14)^2}} = \sqrt{\frac{350}{(14)^2}} = \frac{\sqrt{350}}{14}$$

$$\Rightarrow B_{\perp n} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1/\sqrt{42} \\ -5/\sqrt{42} \\ 4/\sqrt{42} \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -15/\sqrt{350} \\ 5/\sqrt{350} \\ 10/\sqrt{350} \end{pmatrix} \right\}$$

---

Dati $k$ vettori $v_1, v_2, \ldots, v_k$ in uno spazio EUCLIDEO $\Rightarrow$ posso definire una matrice mediante i loro prodotti scalari:

$$\begin{pmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 & v_1 \cdot v_3 & \cdots & v_1 \cdot v_k \\ v_2 \cdot v_1 & v_2 \cdot v_2 & \cdots & \cdots & v_2 \cdot v_k \\ \vdots & & & & \vdots \\ v_k \cdot v_1 & v_k \cdot v_2 & \cdots & \cdots & v_k \cdot v_k \end{pmatrix}$$

Tale matrice è detta Matrice di Gram dei vettori $v_1, \ldots, v_k$

Il suo determinante, detto GRAMIANO di $v_1, \ldots, v_k$, ci dice diverse cose dei vettori stessi.

Denotato il Gramiano con $G(v_1 \dots v_k)$ ; $\Rightarrow$

$G(v_1, \dots, v_k) \neq 0 \iff v_1, \dots, v_k$ sono lin. INDIPENDENTI

[SE I VETTORI SONO BASE DI UN SOTTOSPAZIO $\mathcal{U}$ LA MATRICE DI GRAM E' LA MATRICE DEL PRODOTTO SCALARE DEFINITO SU $\mathcal{U}$ : ESSO E' DEFINITO POSITIVO $\Rightarrow$ PER JACOBI IL DETERM. E' $\neq 0$ ]

Se i vettori sono ORTOGONALI fra loro. $\Rightarrow$ la matrice di Gram è DIAGONALE, il GRAMIANO, $\Rightarrow$ è

$$G(v_1, \dots, v_k) = \|v_1\|^2 \cdot \|v_2\|^2 \cdot \dots \cdot \|v_k\|^2$$

Supponiamo che i vettori non siano ORTOGONALI,

ESEMPIO per $K = 2$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 \\ v_2 \cdot v_1 & v_2 \cdot v_2 \end{pmatrix}$

La matrice di Gram è sempre <u>simmetrica</u> poiché il prodotto scalare è simmetrico.

pongo $w_1 = v_1$ e $v_2 = a w_1 + w_2$ con $w_2 \perp w_1$ $\Rightarrow$

$$w_2 = v_2 - a w_1 = v_2 - a v_1$$

Mediante trasformazioni elementari in riga e colonna $\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} w_1 \cdot w_1 & w_1 \cdot v_2 \\ v_2 \cdot w_1 & v_2 \cdot v_2 \end{pmatrix} \overset{R_2 - aR_1}{\sim} \begin{pmatrix} w_1 \cdot w_1 & w_1 \cdot v_2 \\ v_2 \cdot w_1 - a w_1 \cdot w_1 & v_2 \cdot v_2 - a w_1 \cdot v_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} w_1 \cdot w_1 & w_1 \cdot v_2 \\ \underbrace{(v_2 - a w_1)}_{w_2} \cdot w_1 & \underbrace{(v_2 - a w_1)}_{w_2} \cdot v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \cdot w_1 & w_1 \cdot v_2 \\ w_2 \cdot w_1 & w_2 \cdot v_2 \end{pmatrix} \sim$$

$$C_2 - a C_1 \sim \begin{pmatrix} w_1 \cdot w_1 & w_1 \cdot v_2 - a\, w_1 \cdot w_1 \\ w_2 \cdot w_1 & w_2 \cdot v_2 - a\, w_2 \cdot w_1 \end{pmatrix} =$$

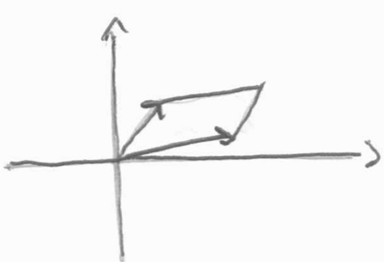
$$= \begin{pmatrix} w_1 \cdot w_1 & w_1 \cdot (\underbrace{v_2 - a\, w_1}_{w_2}) \\ w_2 \cdot w_1 & w_2 \cdot (\underbrace{v_2 - a\, w_1}_{w_2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|w_1\|^2 & 0 \\ 0 & \|w_2\|^2 \end{pmatrix}$$

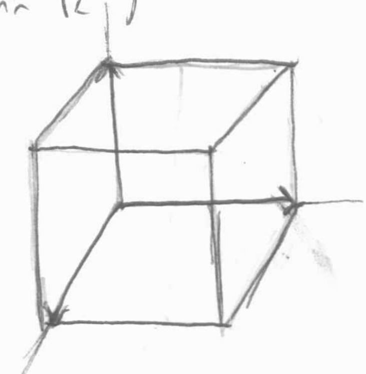
$$\Rightarrow G(v_1 \ldots v_k) = \|w_1\|^2 \cdot \|w_2\|^2 \cdot \ldots \cdot \|w_k\|^2$$
$$\leq \|v_1\|^2 \cdot \|v_2\|^2 \cdots \|v_k\|^2$$

$G(v_1, \ldots v_k) = 0 \iff v_1, \ldots v_k$ LIN. DIPENDENTI

---

Dati $k$ vettori si può disegnare un parallelepipedo se $k > 2$, o parallelogramma (in $\mathbb{R}^2$)

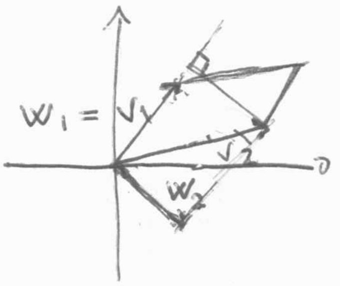




$\Rightarrow$ Il volume del parallelepipedo costruito con $k$ vettori l. INDIPENDENTI è dato dalla <u>radice quadrata</u> del GRAMIANO dei $k$ vettori

$$V(v_1, \ldots, v_k) = \sqrt{G(v_1 \ldots v_k)}$$

In $\mathbb{R}^2$ il volume è l'area del parallelogramma



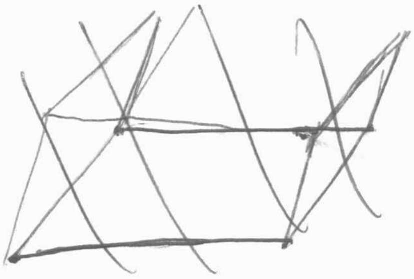

Area del parallelogramma è $b \cdot h$ = base · altezza

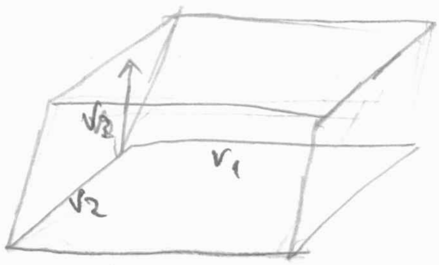
$$G = \|w_1\|^2 \cdot \|w_2\|^2 \qquad w_1 = v_1$$

$v_2$ è decomposto in due componenti una parallela a $v_1$ e l'altra perpendicolare a $v_1$

La componente perpendicolare sarebbe $w_2$ ed è proprio l'altezza.

Lo stesso per un parallelepipedo






$$\left(\|v_1\|^2 \cdot \|v_2\|^2 \cdot \|v_3\|^2\right)^{1/2} = V$$

$v_3 = w_3 \qquad v_2 = w_2$