QUADRICHE

20/05/2015

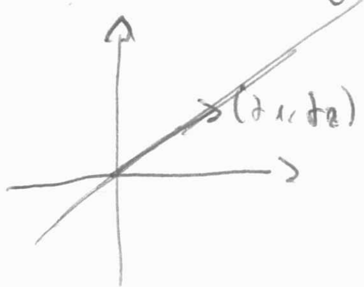
1

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^2 = c$$

Sono già state studiate nel caso in cui il rango è massimo.
Nel piano abbiamo l'ELLISSE e l'IPERBOLE.
Nello spazio abbiamo l'ELLISSOIDE e l'IPERBOLOIDE a una o due FALDE.

Supponiamo $rg\, A = n$ e $c = 0$ $\Rightarrow$
l'equazione in forma canonica è OMOGENEA $\Rightarrow$
se $P = (a_1, \dots, a_n) \in$ Sup. QUADRICA $\Rightarrow$ anche $(ta_1, ta_2, \dots, ta_n)$ appartiene alla Sup. QUADRICA $\forall t \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow$ In $\mathbb{R}^n$ il punto $(ta_1, \dots, ta_n)$ sta su una retta passante per l'origine e per P. $\Rightarrow$

SUL PIANO $t(a_1, a_2)$



$\Rightarrow$ Dunque la superficie è costituita da rette passanti per l'ORIGINE, tranne il caso in cui la superficie stessa si riduce alla sola origine

$$\Rightarrow \frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_k^2}{a_k^2} - \dots\dots - \frac{x_n^2}{a_n^2} = 0$$

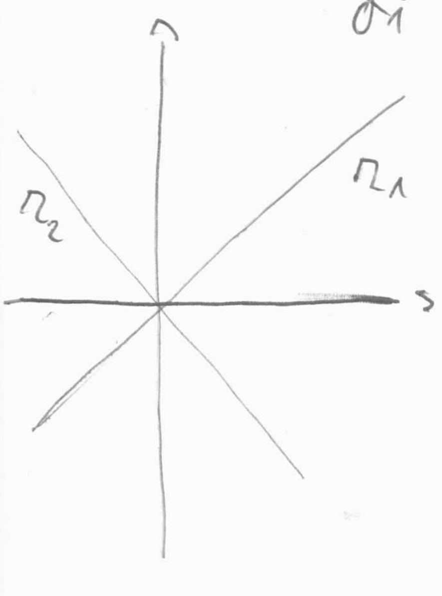
Possiamo considerare solo il caso in cui il # (numero) di termini negativi è $< \frac{n}{2}$. Dato che se è maggiore, cambiamo di segno e si ritorna in questo caso.

$\Rightarrow$ abbiamo $\frac{n}{2}$ tipi di QUADRICHE se n è PARI, $\frac{n-1}{2}$ se n è DISPARI

Per $n = 2$ Oltre il caso banale dell'ORIGINE, $\left(\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0 \right)$ abbiamo $\left(\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0 \right) \Rightarrow$

Questo si spezza in due rette:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0 \Rightarrow \underbrace{\left(\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} \right)}_{r_1} \underbrace{\left(\frac{x_1}{a_1} - \frac{x_2}{a_2} \right)}_{r_2} = 0$$



Due rette passanti per l'origine.

Per $n = 3$ Oltre al caso dell'ORIGINE si ha:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 0$$

Non importa la posizione del termine negativo. L'eq. è di questo tipo a prescindere dalla posizione del "−"

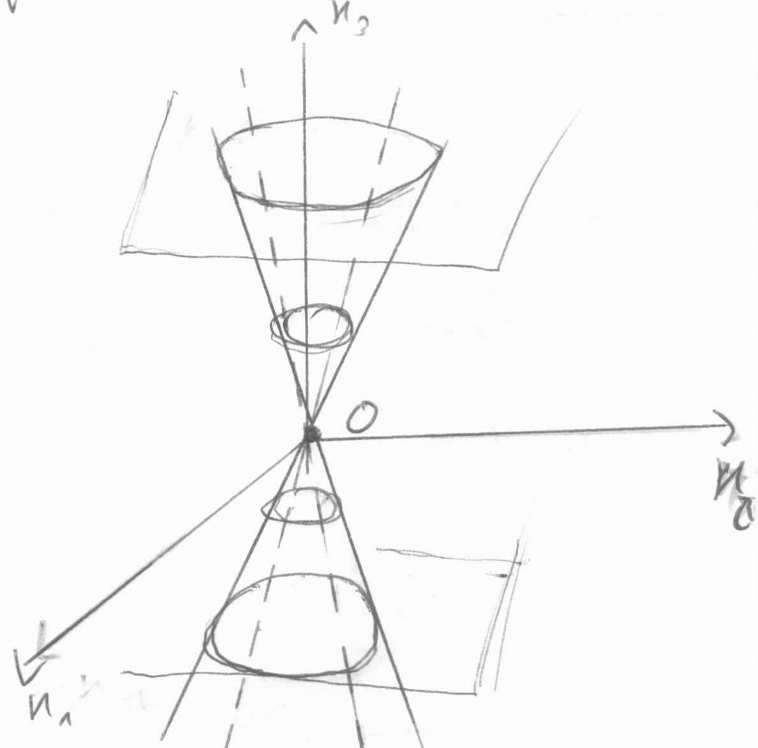
Disegniamola.

Intersechiamo con piani, cioè troviamo le sezioni piane. ~~troveremo delle curve nel piano~~.

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ \dfrac{x_1^2}{a_1} + \dfrac{x_2^2}{a_2^2} - \dfrac{x_3^2}{a_3^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ \dfrac{x_2^2}{a_2^2} - \dfrac{x_3^2}{a_3^2} = 0 \end{cases} \rightarrow \text{due rette}$$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ \dfrac{x_1^2}{a_1^2} - \dfrac{x_3^2}{a_3^2} = 0 \end{cases} \rightarrow \text{due rette}$$

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ \dfrac{x_1^2}{a_1^2} + \dfrac{x_2^2}{a_2^2} = 0 \end{cases} \rightarrow \text{l'origine}$$



$$\begin{cases} x_3 = K \\ \dfrac{x_1^2}{a_1^2} + \dfrac{x_2^2}{a_2^2} = \dfrac{K^2}{a_3^2} \end{cases}$$

Al variare di k si ha un ellisse NEL PIANO $x_3 = K$ $\Rightarrow$ L'EQUAZIONE RAPPRESENTA una SUPERFICIE CONICA.

QUADRICHE NON A CENTRO

Supponiamo di ridurre l'equazione al tipo

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\dots+\frac{x_k^2}{a_k^2}-\dots-\frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2}=x_n$$

Le variabili ci sono tutte da 1 a n solo che fino a n-1 sono al quadrato, l'altra no.

Per quanto riguarda il segno negativo se si moltiplica per (-1) è come se cambiassi il segno di $x_n \overset{\text{diventa}}{\Rightarrow} -x_n$.

Cioè come se ribaltassi il tutto rispetto allo SPAZIO DI EQUAZIONE $x_n = 0$

Ma anche se ribalto la superficie non ne cambia IL TIPO.

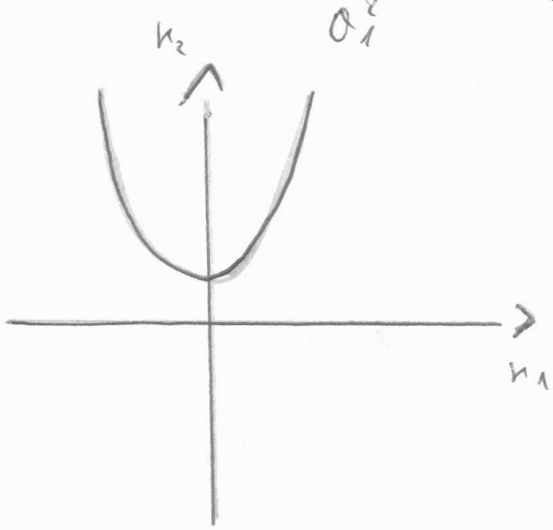
A meno di ribaltamenti rispetto allo spazio (n-1)-dimensionale definito (nel modo così) da $x_1 \dots x_{n-1}$ i tipi possibili di quadriche sono

$\frac{n}{2}$ se n è PARI

$\frac{n+1}{2}$ se n è DISPARI

Per $n = 2$ forme del tipo

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} = x_2 \quad \Rightarrow \quad \text{PARABOLA}$$

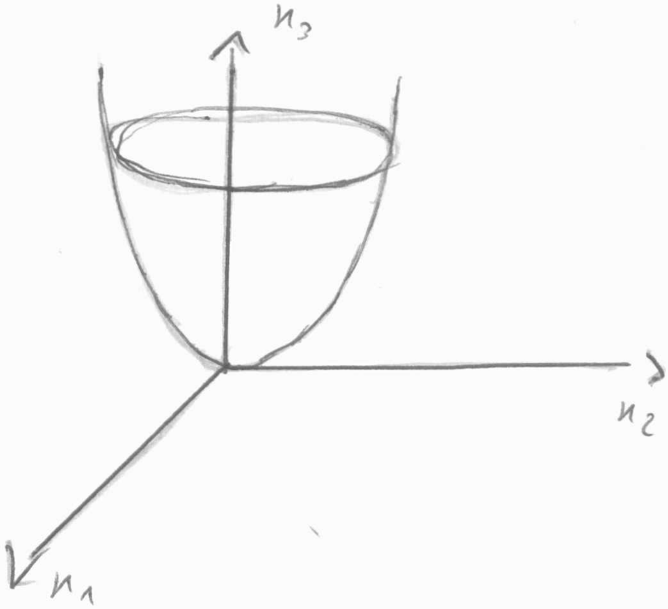


Si vede che cambiando di segno si ha uno specchiamento rispetto a qualche asse. Ma la curva non cambia.

Per $n = 3$ abbiamo

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = x_3 \quad \Rightarrow$$

PARABOLOIDE ELLITTICO



$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = x_3 \Rightarrow$$ PARABOLOIDE IPERBOLICO

Tutte queste sono superfici quadriche NON DEGENERI, poiché compaiono tutti i termini, tutte le variabili:

—

QUADRICHE DEGENERI

Sono quelle che nelle loro equazioni, ridotte a forma canonica, mancano di variabili.

Per $n = 2$ $\quad \frac{x_1^2}{a_1^2} = c$

- se $c > 0 \rightarrow$ due rette
- se $c = 0 \rightarrow$ due rette COINCIDENTI
- se $c < 0 \rightarrow$ due rette immaginarie

Se $c > 0$
abbiamo due rette "//" PARALLELE NON COINCIDENTI

Se $c = 0$
abbiamo due rette "//" PARALLELE COINCIDENTI

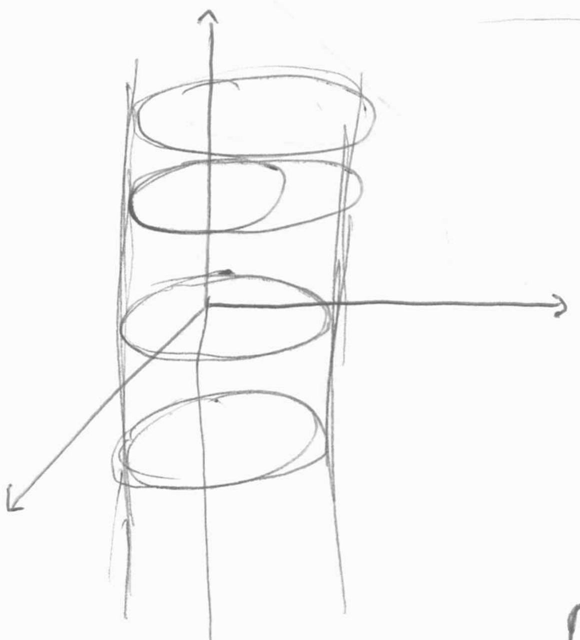
Se $c < 0$
abbiamo due rette IMMAGINARIE

Per $n = 3$

1) $$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = c \quad \begin{cases} c > 0 \to \text{S. CILINDRICA con sezione ELLITTICA} \\ c = 0 \to \text{RETTA (ASSE } x_3) \end{cases}$$

$c < 0$ non ci interessa PERCHÉ NON DÀ PUNTI REALI.

Se $c > 0$ → SUPERFICIE CILINDRICA CON SEZIONE ELLITTICA



Se $c = 0$ rappresenta un punto $(0,0,t)$ nel piano $x_3 = t$

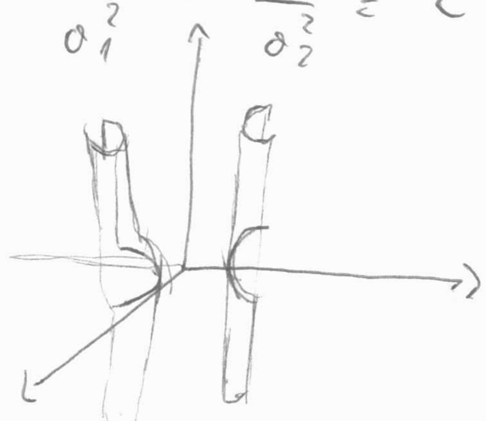
Se taglio con $x_3 = 0$ ci rimane il PUNTO $(0,0)$.

Se taglio con $x_1 = k$ o $x_2 = k$

Non ci sono soluzioni.

Riduce alla retta per $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

2) $$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = c \quad \begin{cases} c > 0 & \text{S. CILINDRICA CON SEZIONI PARABOLICHE} \\ c = 0 & \text{LA SUPERFICIE SI SCOMPONE IN DUE PIANI INCIDENTI} \end{cases}$$



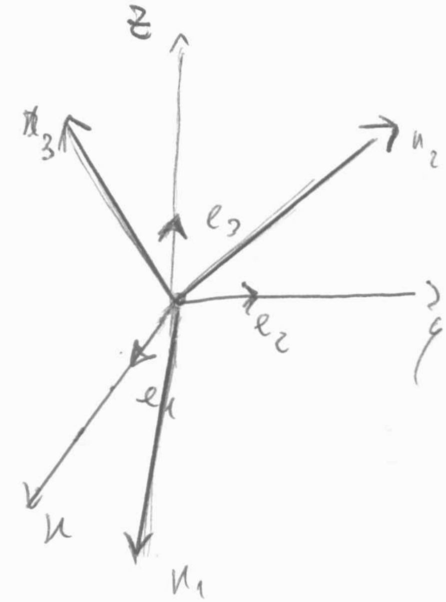
3) $$\frac{x_1^2}{a_1^2} = x_2$$ SUPERFICIE CILINDRICA PARABOLICA

ESERCIZIO

Studiamo la superficie quadrica di equazione

$$xy + yz + xz = 1$$

in coordinate definite dalla base canonica. .



Scriviamo ~~la matrice~~ in forma matriciale L'EQUAZIONE della superficie

~~Cerco A =~~

$$\text{Cerco } A = \begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ \hline x & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ y & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ z & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q : (x, y, z) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 1 = 0$$

Riduco la forma quadratica in forma CANONICA.

Penso la matrice come (ASSOCIATA ALL') OPERATORE LINEARE SIMMETRICO ~~diagonalizzabile~~. Cerco perciò gli AUTOVALORI e gli AUTOSPAZI.

gli AUTOVALORI di A sono

$\lambda = -\frac{1}{2}$; $\lambda = 1$. con $\operatorname{Spec} A : \{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\}$

$\Rightarrow$ Cò una base β_{tr} cercando AUTOVETTORI ORTOGONALI tra loro e NORMALIZZATI.

Si troverà alla fine dopo aver trovato gli AUTOVETTORI, ad esempio

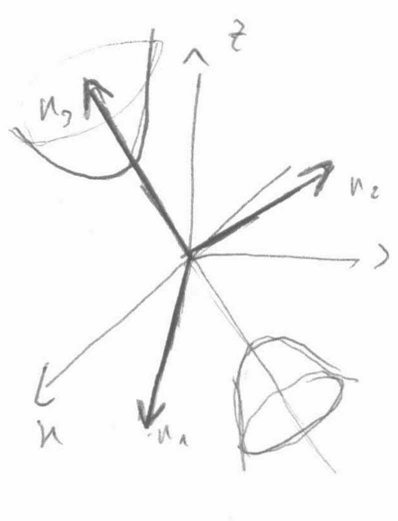
$$\beta_{tr} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -2/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right\}$$

In tale base le coordinate saranno x_1, x_2, x_3 e

$$Q((x_1, x_2, x_3)) = -\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 + x_3^2 = 1$$

Si tratta di un IPERBOLOIDE A DUE FALDE

Opero una rotazione e trovo un nuovo sistema dove posso disegnarla.



ESERCIZIO

$$x^2 - 4xy - 2y^2 - 3x - 3y + 5 = 0$$

$$A = \begin{array}{c|cc} & x & y \\ \hline x & 1 & -2 \\ y & -2 & -2 \end{array}$$

$\text{Spec } A = \{2, -3\}$

$$2x_1^2 - 3x_2^2$$ senza la trasformazione di coordinate.

$\Rightarrow$ La matrice ortogonale S ~~...~~ quella con gli AUTOVETTORI ORTOGONALI NORMALIZZATI.

$$S = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{\sqrt{5}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} x_2 \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}} x_1 + \frac{2}{\sqrt{5}} x_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow Q(x_1, x_2) =$

$$= 2x_1^2 - 3x_2^2 - 3\left(-\frac{2}{\sqrt{5}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} x_2\right) - 3\left(\frac{1}{\sqrt{5}} x_1 + \frac{2}{\sqrt{5}} x_2\right) + 5 = 0$$

$$2x_1^2 - 3x_2^2 + \frac{3}{\sqrt{5}} x_1 - \frac{9}{\sqrt{5}} x_2 + 5 = 0$$

Bisogna "togliere" i termini lineari: METODO DI GAUSS- Applico a ottenere il quadrato di binomio.

$$2x_1^2 + \frac{3}{\sqrt5}x_1 = 2\left(x_1^2 + \frac{3}{2\sqrt5}x_1\right) =$$

$$= 2\left[\left(x_1 + \frac{3}{4\sqrt5}\right)^2 - \frac{9}{16\cdot 5}\right]$$

e così anche per x_2 e così via.

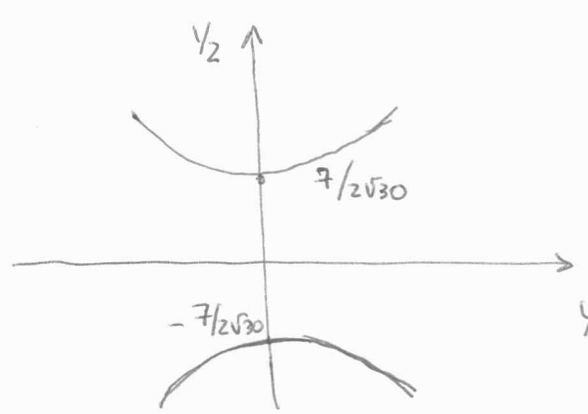
Alla fine opero la nuova trasformazione di coordinate che ci dà LA TRASLAZIONE DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO.

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \dfrac{3}{4\sqrt5} \\ y_2 = x_2 + \dfrac{3}{2\sqrt5} \end{cases} \Longrightarrow$$

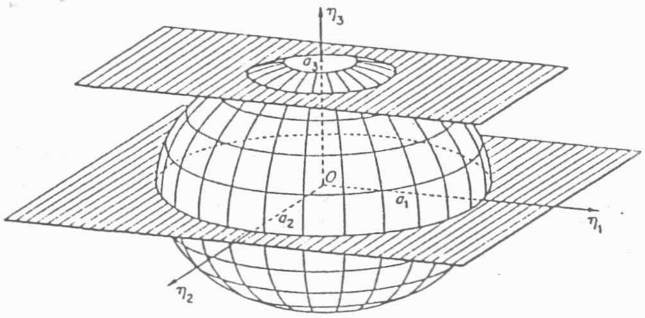
$$\Rightarrow \quad 2y_1^2 - 3y_2^2 + \frac{49}{40} = 0$$

IPERBOLE

$$-\frac{y_1^2}{\frac{49}{80}} + \frac{y_2^2}{\frac{49}{120}} = 1$$

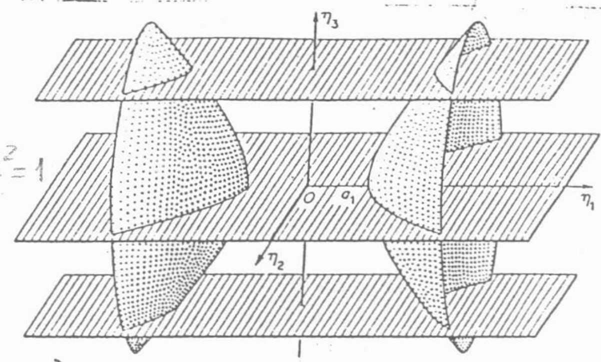


DAL LIBRO DI SHILOV



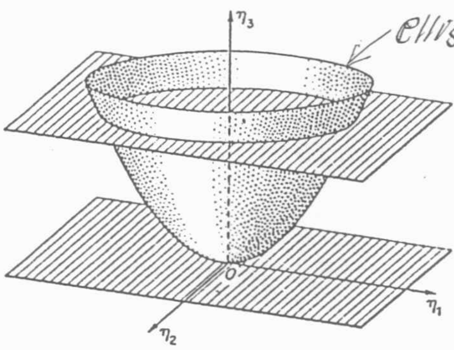
ELLISSOIDE

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$



$x^2 - y^2 - z^2 = 1$

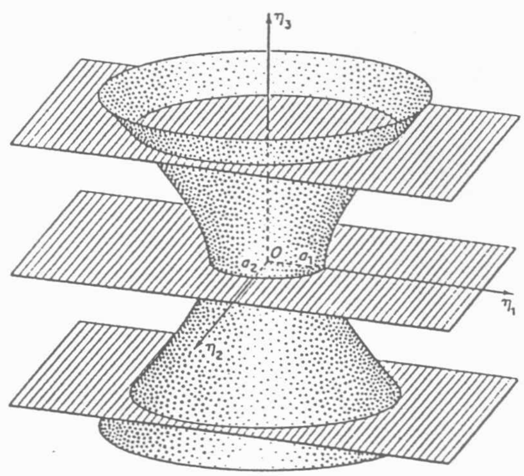
IPERBOLOIDE A 2 FALDE



ellisse (sezione piana)

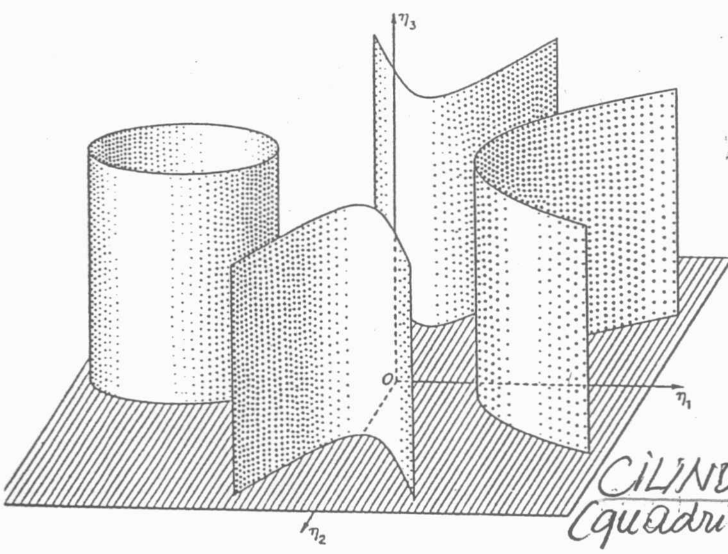
$x^2 + y^2 = z$

PARABOLOIDE ELLITTICO

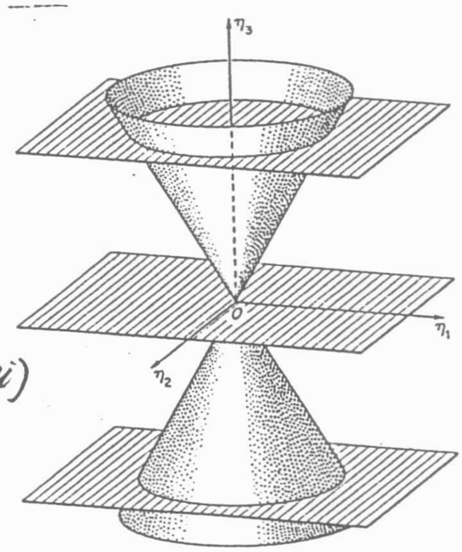


IPERBOLOIDE AD 1 FALDA

$x^2 + y^2 - z^2 = 1$



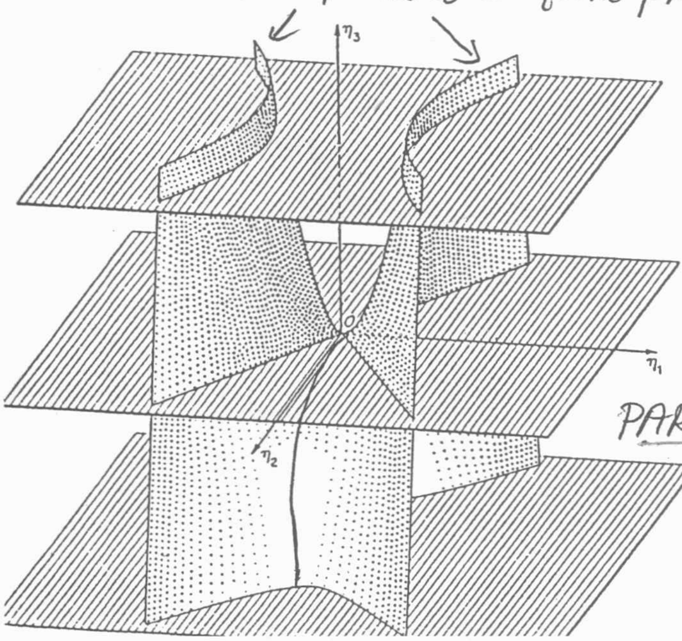
CILINDRI
(quadriche degeneri)



CONO QUADRICO

$x^2 + y^2 - z^2 = 0$

iperbole (sezione piana)



$x^2 - y^2 = z$

PARABOLOIDE IPERBOLICO

O SUPERFICIE A SELLA