PROPOSIZIONE:

Se considero una matrice $A \in M_{p \times n}$ su cui opero una trasformazione elementare riga che indico con $e(A)$, allora si dimostra che, vista A come $I \cdot A$ (con $I \in M_{p \times p}$), $e(A) = (e(I)) \cdot A$

Esempio: Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ ed e = scambio di righe $\Rightarrow e(A) = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Eseguo $e\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$

PROPOSIZIONE:

Se $e_1, e_2, \dots, e_k$ sono operazioni elementari riga $\Rightarrow e_k(e_{k-1}(e_{k-2}(\dots(e_1(A))))) =$

$= [e_k(e_{k-1}(\dots e_2(e_1(I))))] \cdot A$

Dimostrazione:

$$e_k(e_{k-1}(\dots e_2(e_1(A)))) = e_k(e_{k-1}(\dots e_2([e_1(I)] \cdot A))) =$$

$$= e_k \cdot (e_{k-1}(\dots([e_2(I) \cdot e_1(I)] \cdot A))) = \dots = e_k(I)(e_{k-1}(I))(e_{k-2}(I))\dots(e_1(I)) \cdot A =$$

$$= e_k(I) \cdot e_{k-1}(I) \cdot \dots e_2(e_1(I)) \cdot A = \dots = e_k(e_{k-1}(e_{k-2} \dots e_3(e_2(e_1(I))))) \cdot A$$

Sia ora $A \in M_{n \times n}$ invertibile $\Rightarrow$ dopo un numero k di operazioni elementari riga $e_k(e_{k-1}(e_{k-2} \cdots e_2(e_1(A)))) = I_{n \times n}$

$$e_k(e_{k-1}(e_{k-2} \cdots e_2(e_1(I)))) \circ A = I \quad \Rightarrow \text{quindi } e_k(e_{k-1}(e_{k-2} \cdots (e_2(e_1(I))))) = A^{-1}$$

Calcolo dell'inversa con le operazioni elementari riga: formo una nuova matrice $(A \mid I)_{n \times 2n}$. Applico operazioni elementari riga fino a determinare la forma a gradini canonica di $(A \mid I)_{n \times 2n}$ $\Rightarrow$ al termine del procedimento trovo $(I \mid A^{-1})$

mpio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

SCELGO LA 2ª RIGA:

$$|A| = -4(-4)+5 \neq 0 \Rightarrow \text{MATRICE INVERTIBILE}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{R_1-R_3\to R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 12 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \overset{2R_2-9R_3\to R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 12 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -21 & -1 & -2 & 9 \end{array}\right)$$

$$\overset{+21R_2\to R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 189 & 0 & 72 & -45 & 108 \\ 0 & 0 & -21 & -1 & -2 & 9 \end{array}\right) \overset{7R_1+R_3\to R_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 14 & 0 & 6 & -2 & 9 \\ 0 & 189 & 0 & 72 & -45 & 108 \\ 0 & 0 & -21 & -1 & -2 & 9 \end{array}\right)$$

$$\overset{(-\frac{1}{21})\to R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 14 & 0 & 6 & -2 & 9 \\ 0 & 189 & 0 & 72 & -45 & 108 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{21} & \frac{2}{21} & -\frac{9}{21} \end{array}\right) \overset{\frac{R_2}{9}\to R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 14 & 0 & 6 & -2 & 9 \\ 0 & 21 & 0 & 8 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{21} & \frac{2}{21} & -\frac{9}{21} \end{array}\right)$$

$$\overset{-2R_2\to R_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 21 & 0 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 21 & 0 & 8 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{21} & \frac{2}{21} & -\frac{9}{21} \end{array}\right) \underset{\frac{R_2}{21}\to R_2}{\overset{\frac{R_1}{21}\to R_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{21} & \frac{4}{21} & \frac{3}{21} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{21} & -\frac{5}{21} & \frac{12}{21} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{21} & \frac{2}{21} & -\frac{9}{21} \end{array}\right)$$

Consideriamo un sistema lineare omogeneo Σ_0 di p equazioni in n incognite:

$$\Sigma_0 : \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sicuramente questo sistema ha soluzione

Tale $\underbrace{\text{sistema}}_{\text{LINEARE OMOGENEO}}$ ha sempre soluzione perché c'è sempre almeno in sol Σ_0 la soluzione "nulla", cioè ~~costituita da~~ la n-upla costituita da tutti zeri

$\exists$ solo la soluzione nulla quando il rango della matrice A (matrice dei coeff.) è massimo, cioè pari al $\min\{p,n\}$. Inoltre, sapendo che lo spazio delle soluzioni ha dimensione pari al numero delle variabili − rango del sistema $\Rightarrow$ se tale dimensione dev'essere 0 $\Rightarrow$ rango sistema = numero variabili $\Rightarrow \exists$ SOLO UNA SOLUZION

Consideriamo la particolare struttura algebrica con cui mi sto confrontando nello spazio ambiente (che in questo caso è $\mathbb{R}^n$)

Vediamo le operazioni interne su sol Σ_0;

Siano x_1 e x_2 due soluzioni; $(x_1+x_2) \in$ sol Σ_0?

Se $x_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ e $x_2 = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 + x_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1+\beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n+\beta_n \end{pmatrix}$

Poiché x_1 e x_2 appartengono a sol $\Sigma_0 \Rightarrow A\cdot x_1 = 0$ e $A\cdot x_2 = 0$

$A(x_1+x_2) = ?$

$A\cdot x_1 + A\cdot x_2$ (per la proprietà distributiva di prodotto e somma tra matrici)

$A(x_1+x_2) = Ax_1 + Ax_2 = 0 \implies x_1 + x_2 \in Sol\,\Sigma_0$

Se $x_1 \in$ sol Σ_0 e $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda\cdot x_1 \in$ sol Σ_0?

$A\cdot(\lambda\cdot x_1) = \lambda\cdot A x_1 = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda x_1 \in Sol\,\Sigma_0$

Definizione: chiamo <u>spazio vettoriale</u> su un campo $\mathbb{K}$ un insieme V su cui considero due operazioni binarie:

la "somma" $+$: agisce su $V \times V \to V$
$(v_1, v_2) \to v_1 + v_2$

la "moltiplicazione" per elementi del campo (scalari): $\mathbb{K} \times V \to V$
$(\lambda, v) \to \lambda\cdot v$

Tali che: la somma deve soddisfare le proprietà
1) associativa
2) commutativa
3) esistenza elemento neutro
4) esistenza opposto $\forall$ elemento

V dev'essere un gruppo abeliano rispetto alla somma moltiplicazione per uno scalare deve soddisfare queste proprietà:

) associativa, cioè $\alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha \cdot \beta) \cdot v$ $\forall \alpha, \beta \in K$ e $v \in V$

) esistenza dell'elemento neutro, che coincide con l'elemento neutro della moltiplicazione del campo

) proprietà distributiva rispetto alla somma, cioè $\alpha \cdot (v + w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$ e $(\alpha + \beta) \cdot w = \alpha w + \beta w$ $\forall \alpha, \beta \in K$ e $v, w \in V$