22/06/2015 1

PROPOSIZIONE

DATI K VETTORI $v_1, \dots, v_k$ LIN. IND. IN UNO SPAZIO EUCLIDEO n-dim CON $n \geq k \Rightarrow V$(PARALLELEPIPEDO COSTRUITO SUI VETTORI) $= \sqrt{G(v_1, \dots, v_k)}$

DIMOSTRAZIONE

- PER INDUZIONE SU K

1- VERIFICA PER $K=1$: IL PARALLELEPIPEDO SARÀ IL SEGMENTO CHE RAPPRESENTA IL VETTORE $\Rightarrow \underbrace{Vol}_{\text{VOLUME}} = \|v\| = \sqrt{v \bullet v} = \sqrt{G(v)}$

2- SUPPONIAMO VERA LA TESI FINO A K VETTORI E DIMOSTRIAMO CHE VALE PER K+1 VETTORI $v_1, \dots, v_{k+1}$

$$Vol(v_1, \dots, v_k) = \sqrt{G(v_1, \dots, v_k)} = \sqrt{\|w_1\|^2 \|w_2\|^2 \cdots \|w_k\|^2} =$$

(w_j È LA PROIEZIONE ORTOGONALE DI v_j SU $\langle\langle v_1, \dots, v_{j-1} \rangle\rangle^\perp$)

$$= \|w_1\| \cdot \|w_2\| \cdots \|w_k\|$$

ALTEZZA → L'ALTEZZA È LA PROIEZIONE SUL COMPLEMENTO ORTOGONALE DELLO SPAZIO GENERATO SUI PRIMI K VETTORI

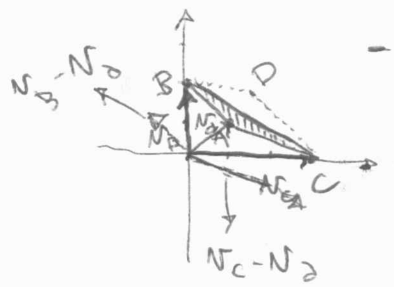
$$Vol(v_1, \dots, v_{k+1}) = Vol(v_1, \dots, v_k) \cdot h =$$

$$= Vol(v_1, \dots, v_k) \cdot \|w_{k+1}\| = \sqrt{\|w_1\|^2 \|w_2\|^2 \cdots \|w_k\|^2} \cdot \sqrt{\|w_{k+1}\|^2} =$$

$$= \sqrt{\|w_1\|^2 \cdots \|w_{k+1}\|^2} = \sqrt{G(v_1, \dots, v_{k+1})} \quad \text{C.V.D.}$$

ESERCIZIO:

DETERMINARE L'AREA DEL TRIANGOLO DI VERTICI $A=(1;1)$; $B=(0;2)$; $C=(3;0)$



- INDIVIDUO 2 VETTORI CHE FORMANO DUE LATI DEL TRIANGOLO, SU DI QUESTI COSTRUISCO IL PARALLELOGRAMMA, NE TROVO L'AREA E POI LA DIVIDO PER 2 PER AVERE L'AREA DEL TRIANGOLO

- MI SERVONO AB E AC: * LA LUNGHEZZA DI AB È INDIVIDUATA DALLA LUNGHEZZA DI $v_B - v_A$
  * ANALOGAMENTE LA LUNGHEZZA DI AC È INDIVIDUATA DALLA LUNGHEZZA DI $v_C - v_a$

$$v_B - v_a = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad v_C - v_a = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Vol DEL PARALLELOGRAMMA COSTRUITO SU $(v_B - v_a)$ E $(v_C - v_a) = \sqrt{G((v_B - v_a), (v_C - v_a))}$

- MATRICE DI GRAM:

$$G = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det G = 10 - 9 = 1$$

Vol PARALLELOGRAMMA $= \sqrt{1} = 1 \Rightarrow$ AREA DEL TRIANGOLO $= 1/2$

COROLLARIO DELLA PROPOSIZIONE PRECEDENTE: ~~[illegible]~~

SIA DATA UNA MATRICE $A \in M_{n\times n}$, $A=(a_{ij})$ $\Rightarrow$ IN $\mathbb{R}^n$ EUCLIDEO FISSIAMO LA BASE CANONICA $\Rightarrow$ COSTRUISCO I VETTORI $v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} e_i$ $\forall j=1,\dots,n$ $\Rightarrow$

(e_i: VETTORI DELLA BASE CANONICA)

$$\Rightarrow (\det A)^2 = G(v_1,\dots,v_n) = (\text{Vol parallelepipedo costruito su } v_1,\dots,v_n)^2$$

DIMOSTRAZIONE:

SCELGO 2 VETTORI QUALUNQUE v_h E v_k TRA QUELLI COSTRUITI:

$$v_h \cdot v_k = \sum_{i=1}^{n} a_{hi} e_i \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{ki} e_i = a_{h1}a_{k1} + a_{h2}a_{k2} + \dots + a_{hn}a_{kn} =$$

LA BASE SCELTA È ORTONORMALE, QUINDI:

$e_i \cdot e_i = 1$

$e_i \cdot e_j = 0 \quad (j \neq i)$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{hi} a_{ki}$$ $\Rightarrow$ FACCIO QUESTO PER TUTTI I VETTORI E OTTENGO GLI ELEMENTI DELLA MATRICE $A^T A$, CHE DUNQUE COINCIDE CON (ANCHE) LA MATRICE DI GRAM

$A^T A$ = MATRICE DI GRAM COSTRUITA SUI VETTORI $v_1,\dots,v_n$

$$\Downarrow$$

$$|A^T A| = G(v_1,\dots,v_n)$$

$$\| \qquad \Downarrow$$

$$|A|^2 = G(v_1,\dots,v_n) \quad \text{C.V.D.}$$

OSSERVAZIONE: LA BASE CANONICA DI $\mathbb{R}^n$ EUCLIDEO È ORTONORMALE, INFATTI

(RISPETTO AL PRODOTTO SCALARE)

$$e_j \cdot e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{j} = 1$$

$$e_j \cdot e_k = {}_{j}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^{k} = 0$$

$$\Downarrow$$

IL COROLLARIO È VALIDO PER OGNI BASE ORTONORMALE DI $\mathbb{R}^n$ EUCLIDEO

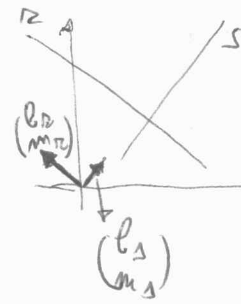
IN $\mathbb{R}^2$ EUCLIDEO:

• CONSIDERO 2 RETTE r ED s, QUANDO SONO PERPENDICOLARI?

DIAMO LE EQ. VETTORIALI DI r E s:

$$r: \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}l_r\\m_r\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$s: \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}l_s\\m_s\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$$



$\Rightarrow$ LE DUE RETTE SONO PERPENDICOLARI SE LO SONO LE LORO DIREZIONI

$$r \perp s \iff \begin{pmatrix}l_r\\m_r\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}l_s\\m_s\end{pmatrix} : \boxed{l_r l_s + m_r m_s = 0}$$

$$\iff \begin{pmatrix}l_r\\m_r\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}l_s\\m_s\end{pmatrix} = 0$$

ESERCIZIO:

1) $r: x+y-1=0$
$s: 2x-y+2=0$ $\quad r \perp s$?

TROVO LA DIREZIONE: $x+y=0 \Rightarrow y=-x \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}l_r\\m_r\end{pmatrix}$

TROVO SOL. PARTICOLARE DI $x+y-1=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}10\\-9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$

$$r: \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}10\\-9\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = s+10 \\ y = -s-9 \end{cases}$$

FACCIO LO STESSO PER s:

$$2x-y=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}l_s\\m_s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s: \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$$

PERCHÉ SIANO PERPENDICOLARI $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ E $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ DEVONO ESSERE ORTOGONALI:

$$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{NON SONO } \perp$$

2) DATA $r: x+y-1=0$, - CERCO UNA PERPENDICOLARE (NE HO INFINITE)
- PASSANTE PER UN PUNTO (NE TROVO UNA)

- TROVARE LA PERPENDICOLARE A r PASSANTE PER $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$:

I PARAMETRI DIRETTORI DI r SONO (A MENO DI MULTIPLI): $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ CERCO UN VETTORE $\begin{pmatrix}l\\m\end{pmatrix}$ TALE CHE $l \cdot 1 + m \cdot (-1) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow l - m = 0 \Rightarrow l = m \Rightarrow \begin{pmatrix}l\\m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \text{LA RETTA CERCATA È } \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}l\\m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\\alpha\end{pmatrix} \Rightarrow$ POSSIAMO PRENDERE $\alpha = 1$

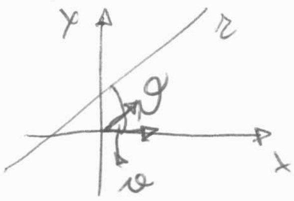
OSSERVAZIONE:

DATA $ax+by+c=0$ UNA RETTA QUALUNQUE DEL PIANO $\Rightarrow$ LA SUA DIREZIONE AVRÀ EQUAZIONE $ax+by=0$, CIOÈ $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$ IL VETTORE $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ È SEMPRE $\perp$ ALLA RETTA

TROVO LA PERPENDICOLARE A s PASSANTE PER $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$$s: 2x - y + 2 = 0 \Rightarrow s_{\perp} = s\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

- DATA r: I **COSENI DIRETTORI** DI r SONO DATI DAL COSENO DELL'ANGOLO CHE LA RETTA FORMA CON LE SEMIRETTE POSITIVE DELL'ASSE X E DELL'ASSE Y



IL COSENO TRA 2 GENERICI VETTORI v E w È:

$$\cos(\hat{v,w}) = \frac{v \circ w}{\|v\|\|w\|}$$

$$\Downarrow$$

TROVO 2 VETTORI CHE DETERMINANO θ E OTTENGO IL COSENO DA QUESTA FORMULA

CERCO UNA BASE DELL'ASSE X E DELLA DIREZIONE DI r:

* BASE DELLA DIREZIONE DI r: $ax + by = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\-\frac{a}{b}\end{pmatrix}$

* BASE DELL'ASSE X: $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \underline{\cos\theta} = \frac{\begin{pmatrix}1\\-\frac{a}{b}\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}1\\-\frac{a}{b}\end{pmatrix}\right\| \cdot \left\|\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}} = \boxed{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

__ESERCIZI DA FARE__:

- TROVARE LA FORMULA DEL COSENO DIRETTORE CON LA SEMIRETTA ~~[illegible]~~ POSITIVA DELL'ASSE Y
- DETERMINARE IL COSENO DELL'ANGOLO TRA DUE RETTE
- DARE LA FORMULA DELLA DISTANZA DI UN PUNTO $P\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ DA UNA RETTA $r: ax + by + c = 0$