1ª LEZIONE — 22 settembre 2014

SISTEMI LINEARI → insieme di equazioni di 1° grado

RISOLVERE 1 SISTEMA → trovare 1 soluzione (o PIÙ) comune a tutte ~~sistem~~ le equazioni

monomi di grado 1 o 0
→ ci possono essere costanti

Sia dato un sistema generico di n equazioni in k incognite $(x_1, x_2, x_3 \dots x_k)$

$$\Sigma : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1k}x_k = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nk}x_k = b_n \end{cases}$$

con a_{ij} numeri reali

per $i = 1, \dots, n$ (riga) e $j = 1, \dots, k$

e $b_l \in \mathbb{R}$ e $l = 1, \dots, n$

eq. lineare NON OMOGENEA → non tutti i monomi hanno lo stesso grado

⇒ anche il SISTEMA è NON OMOGENEO

perché "b_i" ha grado 0 MENTRE GLI ALTRI MONOMI HANNO GRADO 1 ~~ed è diverso da 0~~

Σ NON OMOGENEO

possiamo scrivere il nostro sistema attraverso le sommatorie (Σ)

$$\Sigma : \begin{cases} \sum_{J=1}^{K} a_{1J} x_J = b_1 \\ \vdots \\ \sum_{J=1}^{K} a_{nJ} x_J = b_n \end{cases}$$

sommiamo addendi di quel tipo variando J da 1 a K

Il SISTEMA $\begin{cases} \sum_{J=1}^{K} a_{1J} x_J = 0 \\ \sum_{J=1}^{K} a_{nJ} x_J = 0 \end{cases}$ è OMOGENEO

per indicare che il sistema è omogeneo lo indichiamo con Σ_0

3 DOMANDE : ~~- POSSO RISOLVERE IL SISTEMA?~~

~~- COME FACCIO?~~

0) - COSA SIGNIFICA RISOLVERE UN SISTEMA?

1) - IL SISTEMA Σ è RISOLUBILE?

2) - SE SI, COME POSSO RISOLVERLO?

0) Trovare ~~...~~ soluzioni comuni

~~trovare i numeri che sostituiti agli incogniti~~

- RISOLVERE Σ significa Trovare 1 o più K-uple di NUMERI (#) REALI che SOSTITUITE alle INCOGNITE rendono OGNI EQUAZIONE UN IDENTITÀ (cioè VERIFICATA)

1) per il momento è più difficile rispondere a questa domanda che alla ~~..~~ terza

2) Vari metodi DI RISOLUZIONE GIÀ CONOSCIUTI:

METODO di SOSTITUZIONE -> ricavare da un equazione ~~...~~ una variabile e la sostituiamo

METODO di KRAMER -> metodo delle MATRICI

METODO di SOMMA e SOTTRAZIONE -> Si sommano 2 eq. o si sottraggono e poi si sostituisce TALE SOMMA ad ~~.~~una delle 2 eq.

~~..~~METODO di GAUSS -> metodo di RIDUZIONE

4

METODO di GAUSS

~~ciò~~ devo ridurre ~~a~~ una equazione ~~ad~~ 1 variabile SOLA

MEDIANTE OPERAZIONI SULLE EQUAZIONI DEL SISTEMA

esempio: $\Sigma \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

SIST. LINEARE NON OMOGENEO di 3 ~~equazioni~~ equazioni con 3 incognite

1) per prima cosa ORDINIAMO le ~~equazioni~~ variabili nelle equazioni

2) provo ad eliminare una variabile da un equazione

moltiplico per 2 la seconda equazione (moltiplico tutti i monomi)

$\Sigma' \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

moltiplico anche la terza per eliminare successivamente la variabile x_1

ora ~~trovo~~ CERCO una soluzione dell'ultimo sistema, :
MA TALE SISTEMA, ~~sono~~ è equivalente all'altro sistema ~~Σ~~ INIZIALE ?

→ sistemi con stesse soluzioni

RICORDO CHE UNA SOLUZIONE È COSTITUITA DA (una ~~una~~ terne di numeri)

[devo dimostrare con un CONTROESEMPIO (esempio numerico) quando chiedo se NON sono equivalenti]

→ devo verificarlo con equazioni generiche e NON con esempi PER ~~DI~~ MOSTRARNE L'EQUIVALENZA TRA I SISTEMI

I 2 SISTEMI SONO equivalenti ?

cioè l'insieme $\mathrm{Sol}\,\Sigma$ coincide con l'insieme $\mathrm{Sol}\,\Sigma'$?

insieme delle soluzioni del sistema Σ

$$\mathrm{Sol}\,\Sigma \overset{?}{=} \mathrm{Sol}\,\Sigma'$$ (linguaggio universale)

lo dimostriamo facendo vedere se $\mathrm{Sol}\,\Sigma$ è contenuto in $\mathrm{Sol}\,\Sigma'$ e viceversa

cioè $\mathrm{Sol}\,\Sigma \subseteq \mathrm{Sol}\,\Sigma'$? e $\mathrm{Sol}\,\Sigma' \subseteq \mathrm{Sol}\,\Sigma$?

CONTENUTO:
tutti gli oggetti del I° insieme sono anche del II°

Prop: $\mathrm{Sol}\,\Sigma \subseteq \mathrm{Sol}\,\Sigma'$

DIMOSTRAZIONE: Sia $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathrm{Sol}\,\Sigma \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 3\beta - \gamma - 1 = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \\ -\alpha + 2\beta - \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 3\beta - \gamma - 1 = 0 \\ 2\alpha - 2\beta = 0 \\ -2\alpha + 4\beta - 2\gamma = 0 \end{cases}$$

identicamente all'altro sistema

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(\overset{=0}{\alpha - \beta}) = 0 & 2 \cdot 0 = 0 \\ 2\underbrace{(-\alpha + 2\beta - \gamma)}_{=0} = 0 & 2 \cdot 0 = 0 \end{cases}$$

perché $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathrm{Sol}\,\Sigma$

abbiamo dimostrato che la terna (α, β, γ) è soluzione di entrambi i sistemi

quindi che $Sol\ \Sigma \subseteq Sol\ \Sigma'$

ora dobbiamo dimostrare che $Sol\ \Sigma' \subseteq Sol\ \Sigma$

facendo il passaggio inverso raccogliamo il 2 e diciamo che l'altro termine deve essere uguale a 0 $\Rightarrow$

i 2 SISTEMI SONO EQUIVALENTI

ORA TORNIAMO ALLA RISOLUZIONE DEL SISTEMA: EFFETTUAMO UN'ALTRA OPERAZIONE TRA LE EQUAZIONI DEL SISTEMA:

I eq. − II eq e sostituiamo alla II eq. del sistema

OTTENIAMO:

$$\Sigma'': \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_2 - x_3 = 1 \\ 7x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \Sigma'' \text{ è equivalente a } \Sigma' \text{ CIOÈ}$$

DIMOSTRIAMO CHE $Sol\ \Sigma'' = Sol\ \Sigma'$.