23 febbraio 2015

Esercizio: Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ suppongo che sia la matrice associata ad un ~~appli~~ operatore $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ nella base $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, pensata base del dominio e del codominio.

La matrice ci dice tutto: il rango ci dà la dimensione dell'immagine.

Prendo il primo vettore di base $\underbrace{}_{}$ DEL DOMINIO; NE FACCIO L'IMMAGINE TROVANDO UN vettore nel codominio: ESPRIMO TALE VETTORE COME COMBINAZIONE DEI VETTORI DI BASE DEL CODOMINIO,
I coef. di queste comb. lin. sono 1, 2, 0. E DEFINISCONO LA PRIMA COLONNA DELLA MATRICE.
Lo stesso per la seconda e terza colonna.

I vettori colonna sono i generatori dell'immagine.

$rg\ A = 3 = \dim\ Im\ T$

immagine è sottospazio di $\mathbb{R}^3$, dunque la sua dim è al massimo 3.

Poiché è 3, allora T è suriettiva

SFRUTTO IL Teorema delle Dimensioni: $\underset{\overset{\shortparallel}{3}}{\dim \text{Dominio} T} = \dim \overset{\overset{0}{\shortparallel}}{Ker T} + \dim \underset{\overset{\shortparallel}{3}}{Im\ T}$

IL Nucleo è sottospazio del dominio, insieme di tutti vettori del dominio che hanno immagine nulla.
$\Rightarrow$ PUO' ESSERE DETERMINATO FACENDO:
$Av = 0$ CHE CI PORTA A TROVARE LO SPAZIO DI SOLUZIONI DEL SISTEMA $A \cdot X = 0$: CONSIDERIAMO #VARIABILI − RANGO A = DIM. SPAZIO SOL. $\Rightarrow 3 - 3 = 0 =$ dim spazio delle soluzioni. $\Rightarrow$ T E' INIETTIVA
(In questo caso c'è il sistema, quindi posso fare 3-3).

Poiché l'appl. è anche iniettiva, allora ho un Isomorfismo.

Dare analiticamente T:

$[v]_{B_{dom}}$ scrivo vettore nella base del dominio

cerco la sua immagine: $[T(v)]_{B_{codom}}$

Dare analit. T vuol dire dare le coordinate della IMMAGINE DI UN VETTORE GENERICO DEL DOM. (in questo caso sono 3 coordinate in funzione di x_1, x_2, x_3).

SAPPIAMO CHE $[T(v)]_{B_{codom}} = [T]^{B_{codom}}_{B_{dom}} \cdot [v]_{B_{Dom}}$ QUINDI:

$$A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1 - x_2\\2x_1 + x_2 + x_3\\x_3\end{pmatrix}$$

Ma in questo caso la Base B è data con i vettori ESPRESSI NELLA base canonica!, QUINDI CONTINUIAMO A RAGIONARE CON I VETTORI DELLA BASE CANONICA E QUINDI CERCO LA MATRICE ASSOCIATA A T NELLA BASE CANONICA. Per passare attraverso la Base canonica sfrutto il diagramma commutativo, SOTTO RIPORTATO

$$(\mathbb{R}^3; \mathcal{B}) \xrightarrow[T]{[T]_B} (\mathbb{R}^3; \mathcal{B})$$

a me serve $(\mathbb{R}^3; \mathcal{E}_3) \xrightarrow[{[T]_e}]{T} (\mathbb{R}^3; \mathcal{E}_3)$

$v \longmapsto T(v)$

se ho questa, allora ho la formulazione analitica

PERCHÉ POSSO ADOPERARE $A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = Y$

ED Y CI DÀ LA FORMULAZIONE ANALITICA DI T

$\Rightarrow$

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^3; \mathcal{B}) \arrow[r, "{[T]_B}"] & (\mathbb{R}^3; \mathcal{B}) \\
v \arrow[r, mapsto, "T"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & T(v) \arrow[d, "id_2"] \arrow[dd, bend left=60, mapsto] \\
(\mathbb{R}^3; \mathcal{E}_3) \arrow[u, "id_1"] \arrow[r, "T", "{[T]_e}"'] & (\mathbb{R}^3; \mathcal{E}_3) \\
v \arrow[r, mapsto] \arrow[uu, bend left=60, mapsto] & T(v)
\end{tikzcd}$$

T in basso la vedo come composizione di queste tre:

T in basso $= id_2 \circ$ T in alto $\circ\, id_1$

T in basso = $id_2 \circ$ T in alto $\circ id_1$ => A LIVELLO MATRICIALE SI HA $[T]_{e_3} = [id_2]_B^{e_3} \cdot [T]_B \cdot [id_1]_{e_3}^B$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \, ?$$

OSSERVIAMO CHE: $id_1 \circ id_2 : (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) \xrightarrow{id} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B})$

$\Rightarrow [id]_B^B = I \leftarrow$ la matrice associata a questa applicazione è l'identità.

$\Rightarrow [id_1]_{e_3}^B \, [id_2]_B^{e_3} = I$

QUINDI LE DUE MATRICI $[id_1]_{e_3}^B$ e $[id_2]_B^{e_3}$ sono una l'inverso dell'altra, IN QUANTO

È VERO ANCHE CHE $[id_2]_B^{e_3} \cdot [id_1]_{e_3}^B = I$, COME SI VEDE CONSIDERANDO $id_2 \circ id_1$

$\Rightarrow id = id_2 \circ id_1 : (\mathbb{R}^3, \mathcal{C}) \xrightarrow[I]{} (\mathbb{R}^3, \mathcal{C})$. I è sempre la matrice associata ALLA COMPOSIZIONE.

Tutto questo mi serve per dire che per trovare $[id_1]_{e_3}^B$ devo fare l'inversa della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow [id_1]_{e_3}^B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Adesso ho tutte e tre le matrici e posso trovare $[T]_{e_3}$ FACENDO IL PRODOTTO DELLE TRE MATRICI

Una volta trovata questa matrice, faccio:

$$[T]_{\mathcal{E}_3} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

↳ VETTORE che mi dà LE COMPONENTI dell'applicazione T CHE ERANO RICHIESTE INIZIALMENTE

ABBIAMO VISTO CHE DUE MATRICI A, B ASSOCIATE ALLO STESSO OPERATORE T IN BASI DIVERSE, $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$, POSTO $S = [id]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}$, SONO LEGATE DALLA SEGUENTE RELAZIONE:

$$B = S^{-1} A S$$

DIAMO LA SEGUENTE DEFINIZIONE

<u>Definizione</u>: Due matrici quadrate $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}$ si dicono $\boxed{\text{SIMILI}}$ se $\exists$ una matrice S, invertibile, tale che $B = S^{-1} A S$

<u>Osservazione</u>: la relazione di SIMILITUDINE tra matrici quadrate è di EQUIVALENZA (valgono proprietà simmetrica, riflessiva e transitiva)

INDICHIAMO LA RELAZIONE A simile a B, CON $A \sim_S B$

DIMOSTRAZIONE DELL'EQUIVALENZA DELLA RELAZIONE DI SIMILITUDINE:

Riflessiva: $A \sim_S A$: cioè $\exists S$ invertibile tale che $A = S^{-1} A S$?

$\Rightarrow$ Sì, $S = I$

Simmetrica: $A \sim_S B \Rightarrow B \sim_S A$ cioè sappiamo che $\exists S$ invertibile tale che $B = S^{-1} A S$

dobbiamo dimostrare che $\exists T$ invertibile tale che $A = T^{-1} B T$

$$\Rightarrow SB = \underbrace{SS^{-1}}_{I} AS = AS$$

$$SBS^{-1} = A \underbrace{SS^{-1}}_{I} = A$$

$$\Rightarrow T = S^{-1}$$

Transitiva: Se $A \sim_S B$ e $B \sim_S C \Rightarrow A \sim_S C$

ipotesi: $B = S^{-1}AS$ e $C = T^{-1}BT$

tesi $\exists\, U$ tale che $C = U^{-1}AU$

$$C = T^{-1}(S^{-1}AS)T \underset{\substack{\downarrow \\ \text{vale} \\ \text{associativa}}}{=} T^{-1}S^{-1}AST = (T^{-1}S^{-1})A(ST) =$$

$$= (ST)^{-1}AST$$

dunque $U = ST$

Abbiamo dimostrato che la relazione è di equivalenza.

Posso costruire le classi di equivalenza.

<u>OSSERVAZIONE</u> Una classe di eq. di matrici simili corrisponde ad un operatore.

C'è qualcosa che non cambia tra queste matrici simili?

VEDIAMO:

Siano A, B simili $\Rightarrow$ essendo matrici quadrate, c'è un legame tra i loro determinanti?

So che $B = S^{-1}AS$, S invertibile

$$|B| = |S^{-1}AS| \underset{\substack{\downarrow \\ \text{teorema di} \\ \text{Binet}}}{=} |S^{-1}|\,|A|\,|S| = |S|^{-1}\,|A|\,|S| =$$

$$\underset{1}{\underbrace{|S|^{-1}|S|}}$$

$\Rightarrow |B| = |A|$

sono numeri vale quindi la commutativa

$\Rightarrow$ <u>MATRICI</u> <u>SIMILI</u> <u>HANNO</u> <u>LO STESSO</u> <u>DETERMINANTE</u>.

<u>PROPOSIZIONE</u>: MATRICI SIMILI HANNO LO STESSO RANGO

DIMOSTRAZIONE: SE PENSIAMO A MATRICI SIMILI COME MATRICI ASSOCIATE ALLO STESSO OPERATORE IN BASI DIVERSE, IL LORO RANGO È PARI ALLA DIMENSIONE DELL'IMMAGINE DELL'OPERATORE E QUINDI NON CAMBIA PERCHÈ È INTRINSECA ALL'OPERATORE E NON DIPENDE DALLE BASI SCELTE

Data una matrice A quadrata ($\in \mathcal{M}_{m \times m}$), $\Rightarrow$ definisco POLINOMIO CARATTERISTICO associato ad A nella variabile λ, $P_A(\lambda)$, il polinomio così ottenuto:

$\det(A - \lambda I)$

Esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P_A(\lambda) = \det\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] =$

$$= \det\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \det\begin{pmatrix} (1-\lambda) & 2 & 0 \\ 0 & (-1-\lambda) & 1 \\ 1 & 1 & (1-\lambda) \end{pmatrix} = (1-\lambda)\left[(-1-\lambda)(1-\lambda) - 1\right] + 2 =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 2) + 2 =$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda$$

$\hookrightarrow$ il polinomio è SEMPRE dello stesso grado dell'ordine della matrice

Se $A \in \mathcal{M}_{m \times m} \Rightarrow \deg P_A(\lambda) = n$

Si può trovare anche $|\lambda I - A|$, allora ottengo come coef. di λ (con grado massimo) "$+1$"; nelle scomposizioni è utile avere un polinomio monico. (CIOÈ CON COEFFICIENTE DEL TERMINE DI GRADO MASSIMO $= +1$)

Facendo $(A - \lambda I)$ posso semplicemente sottrarre λ agli elementi della diagonale della matrice. MA IL TERMINE DI GRADO MASSIMO HA COEFFICIENTE $(-1)^m$

Risolvo poi $-\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda = 0$ e trovo radici del polinomio caratteristico che si dicono RADICI CARATTERISTICHE

NELL'ESEMPIO DI PRIMA, OTTENIAMO:

$$\Rightarrow \quad \lambda(-\lambda^2 - \lambda + 2) = 0$$

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \begin{cases} \dfrac{-1-3}{-2} = 2 \\[2ex] \dfrac{-1+3}{-2} = -1 \end{cases}$$

Le radici caratteristiche sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$

PROPOSIZIONE:

matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.

DIMOSTRAZIONE: $A \sim_S B \Rightarrow B = S^{-1}AS$

$$\Rightarrow P_B(\lambda) = |B - \lambda I| = |S^{-1}AS - \lambda I| = |S^{-1}AS - \lambda S^{-1}S| =$$

$$= |S^{-1}AS - S^{-1}\lambda S| = |S^{-1}||A - \lambda I||S| =$$

uso Binet

$$= |A - \lambda I| = P_A(\lambda)$$