Definizione: Una matrice A quadrata è detta antisimmetrica se $A+A^T=0$ (1)
(cioè se $A^T=-A$)

Proposizione: Due matrici congruenti hanno lo stesso rango.
($A \sim_c B \iff \exists\, S$ invertibile tale che $A=S^TBS$)

Lemma: Siano $A, S \in M_{N\times N}$, S invertibile $\Rightarrow rg(AS)=rg(SA)=rg\,A$

Dimostrazione: Siano $C_S^1, C_S^2, \dots, C_S^N$ le colonne di $S \Rightarrow AS=(AC_S^1, AC_S^2, \dots, AC_S^N)$
tali colonne sono combinazione lineare delle colonne di A
$\Rightarrow$ il # di colonne di AS lin. indip. coincide con quello delle colonne di $A \Rightarrow rg(AS)=rg(A)$
Analogamente, considerando le righe, si dimostra che $rg(SA)=rg\,A$

Considero ora BS (nell'uguaglianza $A=S^TBS$) $\Rightarrow rg(BS)=rg\,B$;
$rg\,S^T(BS)=rg(BS)=rg\,B$, poiché $S^T(BS)=A$, $rg\,A=rg\,B$.

c.v.d

Definizione: Una forma bilineare F è detta DEGENERE se il $rg[F]_B$ non è massimo (e quindi è detta NON DEGENERE se il rango è massimo) DOVE B È UNA QUALUNQUE BASE DI V.

Si ricorda che $U \leq V$ è detto F-ortogonale a W se $F((v,w))=0\ \forall\, v\in U$ e $w\in W$.
Tale spazio si indica con $W^\perp$.

Proposizione: Sia F una forma bilineare simmetrica, non degenere, SENZA VETTORI ISOTROPI $\Rightarrow$ posto $\dim W=k$, $W \leq V$, e $\dim V=n \Rightarrow \dim W^\perp=n-k$

Dimostrazione: Sia $B_W=\{w_1,\dots,w_k\}$ una base di W. Se $v\in W^\perp \Rightarrow F((v,w_j))=0$
$\forall j=1,\dots,k \Rightarrow$ considero $B_V=\{w_1,\dots,w_k, v_1,\dots,v_{n-k}\}$ base di V

ottenuta considerando quella di W $\Rightarrow$ cerco i vettori v di V tali che (2)

$F((v, w_j)) = 0 \ \forall j = 1, \dots, k$.

Conto $v = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_n u_{n-k}$ $\Rightarrow F((v, w_1)) = F((a_1 w_1 + \dots + a_N v_{N-k}, w_1)) =$

$= a_1 F((w_1, w_1)) + a_2 F((w_2, w_1)) + \dots + a_N F((v_{N-k}, w_1)) = 0 \ \dots$

$F((v, w_k)) = F((a_1 w_1 + \dots + a_N v_{N-k}, w_k)) = a_1 F((w_1, w_k)) + \dots + a_N F((w_{n-k}, w_k)) = 0$

a sistema

$$\Sigma: \begin{cases} a_1 F((w_1, w_1)) + \dots + a_N F((v_{N-k}, w_1)) = 0 \\ \vdots \\ a_1 F((w_1, w_k)) + \dots + a_N F((w_{N-k}, w_k)) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} F((w_1, w_1)) & F((w_2, w_1)) & \dots \\ \vdots & & \\ F((w_1, w_k)) & F((w_2, w_k)) & \dots \end{pmatrix}$$

Poiché F è NONDEGENERE $\Rightarrow$ rg A è massimo poiché A è sottomatrice di $[F]_{B_V}$ $\Rightarrow$ rg $A = k$

$\Rightarrow$ dim Sol $\Sigma = n - k =$ dim $W^\perp$

c.v.d

Esempio: $F: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\left(\underset{v}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}, \underset{w}{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}} \right) \longmapsto 2x_1 y_1 - x_2 y_2 + 3 x_3 y_3$$

PRESA IN $\mathbb{R}^3$ (base canonica) $\Longrightarrow$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3} = [F]_e$

$F((v, w)) = F((w, v)) \ \forall v, w \in \mathbb{R}^3$

PRESO

$\pi: x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow$ CERCO $\pi^\perp \Rightarrow B_\pi = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow$

x_1	$-x_2$	$-x_3$
-1	1	0
-1	0	1

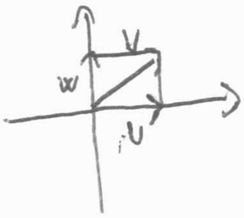
dim $\pi = 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} F\left(\left(x, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right) = 0 \\ F\left(\left(x, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right) = 0 \end{cases} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{retta } \pi^\perp$$

Sia F forma bilineare ~~non degenere~~ SIMMETRICA, $F: V \times V \to \mathbb{R}$ $\dim V = n$; sia $U < V$ con $\dim U = k$. Supponiamo che non ci siano in U vettori isotropi $\Rightarrow \dim U^\perp = n-k \Rightarrow V = U + U^\perp$ e poiché $U \cap U^\perp = \{0\}$ in quanto se $v \in U \cap U^\perp \Rightarrow$
$\Rightarrow F((v,v)) = 0$ ma in U non ci sono vettori isotropi.

$\Rightarrow V = U \oplus U^\perp \Rightarrow \forall\, v \in V$ v è dato come somma di u e w con $u \in U$ e $w \in U^\perp$, cioè $v = u + w \Rightarrow u$ è detto PROIEZIONE ORTOGONALE di v su U e
w è detto PROIEZIONE ORTOGONALE di v su $U^\perp$



$\boxed{\text{Esercizio per casa}}$: $F: V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilineare simmetrica. dimostrare che due vettori v, w non isotropi F-coniugati sono lin. indip.

<u>Definizione</u>: 1) Una base B di uno spazio V è detta **<u>F-ortogonale</u>** se i vettori di B sono F-coniugati (a due a due). Tale base si indica $B_\perp$

2) Una base B di V è detta <u>F-ortonormale</u> se i vettori di B sono F-coniugati (a due a due) e $F((v_j, v_j)) = 1$ $\forall j = 1, \dots, n$ con $B = \{v_1, \dots, v_n\}$
Tale base si indica con $B_{\perp n}$

Se considero in V, $B_\perp \Rightarrow [F]_{B_\perp} =$ matrice diagonale e $[F]_{B_{\perp n}} = I$

<u>Proposizione</u>. Sia $F: V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilineare simmetrica, non nulla $\Rightarrow \exists$ in V almeno un ~~[illegible]~~ vettore non isotropo.

<u>Dimostrazione</u>: Considero $v, w \in V$ / $F((v,w)) \neq 0$

$$F((v+w, v+w)) = F((v,v)) + F((w,v)) + F((v,w)) + F((w,w)) = F((v,v)) + F((w,w)) + 2F((v,w))$$

$\Rightarrow 0 \neq F((v,w)) = \dfrac{F((v+w, v+w)) - F((v,v)) - F((w,w))}{2}$ ← in $\mathbb{R}$ si può dividere per 2 perché è a caratteristica 0

$\Rightarrow$ Almeno uno tra $v, w, v+w$ è non isotropo.

c.v.d.

Proposizione: Data $F: V \times V \to \mathbb{R}$. forma bilineare simmetrica non nulla $\Rightarrow \exists$ sempre una base di V F-ortogonale, $B_\perp$

per induzione su $\dim V$

1) per $n=1$ → banale

2) Supponiamo vera la prop. per spazi con dim fino a k e la dimostriamo per $\dim V = k+1$.

Prendo un vettore $v \in V$ non isotropo $\Rightarrow$ considero $\langle\langle v \rangle\rangle = U$ e costruisco $U^\perp$ sottospazio di V di dimensione $(k+1)-1=k \Rightarrow U \oplus U^\perp = V$.

Prendo una base $B_\perp$ di $U^\perp$ che esiste per ipotesi induttiva

$\Rightarrow$ posso considerare $B_V = B_\perp \cup \{v\}$ e tale base è F-ortogonale.

$\boxed{\text{Esercizio per casa}}$: dimostro $(U^\perp)^\perp = U$