Geometria, II Lezione

24/09/2014

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_2 - x_3 = 1 \\ 7x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$$

N.B: Al livello insiemistico abbiamo aggiunto "operazioni", le quali devono soddisfare determinate "proprietà".

- Insiemi numerici:

$\mathbb{N}$: numeri naturali $\xrightarrow{\text{AMPLIAMENTO } \mathbb{N}}$ $\mathbb{Z}$: numeri interi
(non esistono "opposti") (non esistono "reciproci")

ampliamento $\mathbb{Z}$ $\longrightarrow$ $\mathbb{Q}$: numeri razionali $\longrightarrow$ tale insieme è un "campo" in quanto soddisfa determinate proprietà (si passerà a spazi vettoriali e successivamente a spazi euclidei)

$\downarrow$ ampliamento $\mathbb{Q}$

$\mathbb{R}$: numeri reali

N.B: funzione è pensata tra sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, applicazione si estende a $\mathbb{R}^n$

1. def. Morfismo fra strutture algebriche
« applicazione fra tali strutture algebriche che conserva le operazioni »

2. def. Isomorfismo
« morfismo biettivo »

- osservazione: non è $\mathbb{N}$ che "rientra" in $\mathbb{Z}$, ma attraverso un isomorfismo posso "far rientrare" ~~$\mathbb{N}$~~ in $\mathbb{Z}$. UN SUO SOTTOINSIEME ISOMORFO AD $\mathbb{N}$

$$\Sigma'' : \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_2 - x_3 = 1 \\ 7x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$$

- Risolvo applicando il "<u>metodo di riduzione di Gauss</u>"

MOLTIPLICO LA II EQ. PER 7

MOLTIPLICO LA III EQ. PER (−5)

$$\longrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 7 \cdot (5x_2 - x_3) = 1 \\ -5 \cdot (7x_2 - 3x_3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 35x_2 - 7x_3 = 7 \\ -35x_2 + 15x_3 = -5 \end{cases}$$

somma II e III equaz. e sostituisco nella III

$$\longrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_2 - x_3 = 1 \\ 8x_3 = 2 \end{cases}$$

(<u>struttura</u> "<u>a</u> <u>gradini</u>")

- Proseguo con il metodo di Gauss "in ascesa": ELIMINO LA III VARIABILE DALLA II e I EQUAZIONE $\Rightarrow$

divido III equaz per 2

$$\longrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_3 = 1 \end{cases}$$

moltiplico II e I per 4

$$\longrightarrow \begin{cases} 8x_1 + 12x_2 - 4x_3 = 4 \\ 20x_2 - 4x_3 = 4 \\ 4x_3 = 1 \end{cases}$$

II + III $\longrightarrow$ II

I + III $\longrightarrow$ I

$$\longrightarrow \begin{cases} 8x_1 + 12x_2 = 5 \\ 4x_2 = 1 \\ 4x_3 = 1 \end{cases}$$

ELIMINO x_2 DALLA I EQ.

−3II + I $\rightarrow$ I

$$\longrightarrow \begin{cases} 8x_1 = 2 \\ 4x_2 = 1 \\ 4x_3 = 1 \end{cases}$$

soluzione

$$\longrightarrow \begin{cases} x_1 = 1/4 \\ x_2 = 1/4 \\ x_3 = 1/4 \end{cases}$$

- Osservazione: il metodo di Gauss è quello utilizzato dai calcolatori

→ nel caso in cui ad esempio la I equazione non abbia l'incognita x_1, è ~~possibile~~ NECESSARIO "scambiare" l'ordine delle equazioni all'interno del sistema senza che cambi il "insieme delle soluzioni"

def. Pivot: si chiama così la prima variabile di ogni equazione con coefficiente non nullo nel sistema ridotto "a gradini"

N.B: devo partire dai Pivots nel caso in cui voglio risolvere un sistema a ritroso UTILIZZANDO IL METODO DI GAUSS IN ASCESA: SI ELIMINANO LE VARIABILI DEI PIVOTS NELLE EQUAZIONI CHE SI TROVANO SOPRA QUELLA CHE CONTIENE IL DATO PIVOT.

def. Rango del sistema: « numero dei Pivots presenti nel sistema » RIDOTTO A GRADINI, AL TERMINE DEL METODO DI GAUSS IN DISCESA.

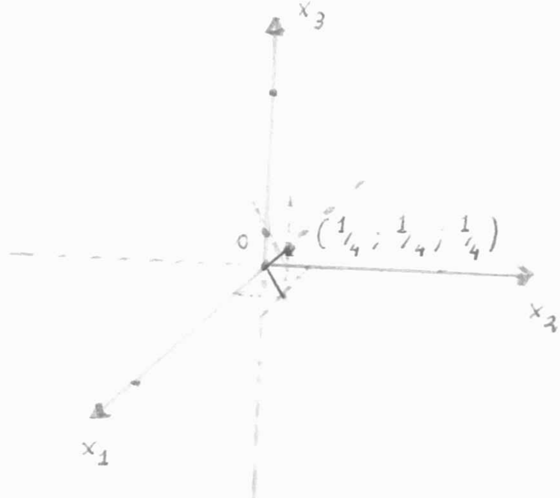
. la differenza fra il numero di incognite ed il numero di Pivots mi da il "numero di parametri" del sistema (o "grado di libertà") CIOÈ IN NUMERO DELLE VARIABILI INDIPENDENTI

N.B LA DIMENSIONE DELLO "spazio ambiente" mi é dato dal n° di incognite del sistema (esempio: se incognite $x_1, x_2, x_3 \longrightarrow$ spazio ambiente: $\mathbb{R}^3$)

$\mathbb{R}^3 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

terne ordinate

. terna: $\left(\frac{1}{4} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{4}\right)$



terna "destrorsa"