Spazi Vettoriali

Chiamo spazio vettoriale su un campo k un insieme V su cui considero due operazioni: la "somma" e la moltiplicazione per uno scalare (elemento del campo)

Esempio: $V = \{\text{polinomi in una variabile di grado } 3 \text{ su } \mathbb{R}\} = \{a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4 \mid a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}[x]_3$

LA SOMMA DI POLINOMI È DEFINITA NEL MODO SEGUENTE:

$P_1(x)+P_2(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \Rightarrow (P_1+P_2)(x)$

$P_1(x) = a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$

$P_2(x) = b_1x^3+b_2x^2+b_3x+b_4 \Rightarrow P_1+P_2 = (a_1+b_1)x^3+(a_2+b_2)x^2+(a_3+b_3)x+(a_4+b_4)$

E LA MOLTIPLICAZIONE PER UNO SCALARE α

$(\alpha P_1)(x) = \alpha a_1 x^3 + \alpha a_2 x^2 + \alpha a_3 x + \alpha a_4$

(Verificare che le due operazioni $(P_1+P_2)(x)$ e $(\alpha P_1)(x)$ soddisfano i requisiti dello spazio vettoriale) $\Rightarrow (\mathbb{R}[x]_3, +, \cdot)$ é uno spazio vettoriale

Anticipazione:

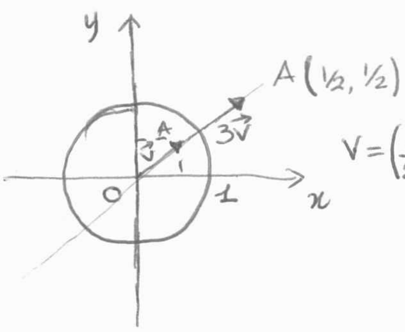
Isomorfismo: operazione biettiva che conserva le operazioni tra le strutture algebriche:

$f:(G_1,*) \longrightarrow (G_2,\Delta)$ biiettiva $f(g_1 * g_2) = f(g_1)\Delta f(g_2)$

ANALIZZIAMO ALCUNI SOTTOINSIEMI DELLO SPAZIO VETTORIALE $(\mathbb{R}^2; +, \cdot\alpha)$

In $(\mathbb{R}^2; +, \circ\alpha)$ considero 1) un cerchio centrato in O di raggio 1 = D(0,1)

$D(0,1) = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$

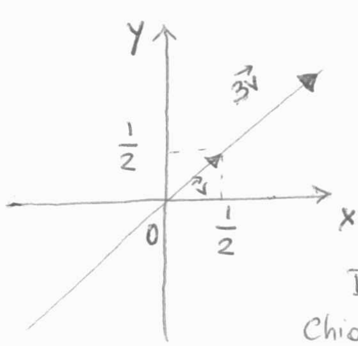


$v = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \rightarrow 3v = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ $\rightarrow$ 3v non é in D(0,1)

D(0,1) non é chiuso rispetto a questa operazione

Considero

2) la retta $y=x$



$v\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow 3v = \left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$ $\quad 3v \in y=x$

$v+3v \in y=x$

Definizione:

Chiamiamo sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale $(V; +, \alpha)$

Un sottoinsieme W di V, chiuso rispetto alle operazioni dello spazio

cioé vale che:

1) $0 \in W$

2) $w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1+w_2 \in W$

3) Se $w_1 \in W \Rightarrow \alpha w_1 \in W \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

indico W sottospazio di V così:

$W < V$

Esempio Considero il sistema Σ_0 $Ax=0$ con $x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}^n$ sarà lo spazio ambiente in cui ~~studiamo~~ COLLOCHIAMO geometricamente le soluzioni di Σ_0

Considero $Sol\Sigma_0 \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow Sol\Sigma_0$ é un sottospazio di $\mathbb{R}^n$: INFATTI :

In $Sol\Sigma_0$ c'é sempre il vettore nullo (ESSENDO IL sistema omogeneo)

Se $V_1, V_2 \in Sol\Sigma_0 \rightarrow V_1 + V_2 \in Sol\Sigma_0$
Se $V \in Sol\Sigma_0 \rightarrow \alpha V \in Sol\Sigma_0 \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow Sol\Sigma_0 \leqslant \mathbb{R}^n$

Analisi di $Sol\Sigma_0$

In caso di sistema omogeneo in una variabile:

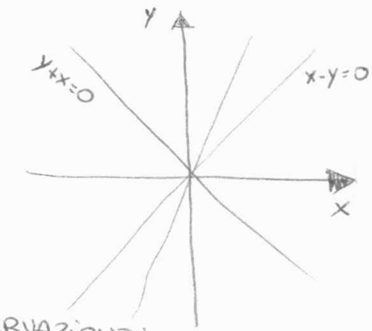
$$\begin{cases} 2x=0 \\ -\sqrt{2}x=0 \\ \frac{28}{3}x=0 \end{cases} \quad Sol\Sigma_0 = \{x=0\} = \{0\}$$

0 é il più piccolo sottospazio vettoriale possibile

$\{0\} \leqslant \mathbb{R}$

OSS: Ogni spazio vettoriale é sottospazio di se stesso (sottospazio banale)
Il sottoinsieme $\{0\}$ é sempre sottospazio di V, qualunque sia V
$\{0\}$ E' L'UNICO SOTTOSPAZIO DI $\mathbb{R}$, OLTRE $\mathbb{R}$ STESSO

Sottospazi del piano:



tutte le rette passanti per l'origine sono sottospazi vettoriali (devono contenere il vettore nullo)
e sono gli unici sottospazi propri (NON BANALI)

OSSERVAZIONE:

Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ é spazio delle soluzioni di un opportuno sistema lineare omogeneo (in n equazioni)

Sottospazi di $\mathbb{R}^3$ (propri):

Rette per l'origine (Unici sottospazi propri di dimensione 1)
Piani per l'origine (" " " " " 2)

Esempio: (l'intersezione di due piani dà una retta)

$$\begin{cases} 2x+3y-z=0 \\ x-y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5y=z \\ x=y \end{cases}$$

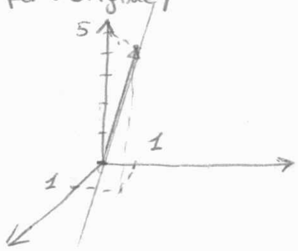
$n=3$ $\quad Rg\,\Sigma_0 = Rg\begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \quad \dim Sol\Sigma_0 = 3-2 = 1$

$Sol\Sigma_0$ é una sottospazio vettoriale di dimensione 1 (retta per l'origine)

x	z	y
1	5	1
a	5a	a

$\Rightarrow (1,1,5)$ soluzione fondamentale
$(a,a,5a)$ vettore qualunque in $Sol\Sigma_0$ $(a \in \mathbb{R})$

$$Sol\Sigma_0 = \{a(1,1,5), a \in \mathbb{R}\}$$



Esempio 2

π: $X = y - z$ ← equazione cartesiana di un piano

x	y	z
1	1	0
-1	0	1
a-b	a	b

$\Rightarrow$ $\overset{v_1}{(1,1,0)}$ e $\overset{v_2}{(-1,0,1)}$ SONO LE SOLUZIONI FONDAMENTALI

MENTRE

$(a-b, a, b)$ E' SOLUZIONE GENERALE $(a, b \in \mathbb{R})$

$$Sol\ \Sigma_0 = \{(a-b, a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \{a(1,1,0) + b(-1,0,1) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

LA SOLUZIONE GENERALE E' <u>COMBINAZIONE</u> <u>LINEARE</u> DELLE SOLUZIONI FONDAMENTALI

π: $\begin{cases} x = a - b \\ y = a \\ z = b \end{cases}$ ← equazione parametrica del piano ~~DI~~ EQUAZIONE CARTESIANA $X - y + z = 0$