Sia T un operatore in uno spazio euclideo $\mathbb{R}^n$, T BIETTIVA.

SUPPONIAMO

T isometrico, cioé tale che $\forall\, v, w \in \mathbb{R}^n \quad T(v)\cdot w = v \cdot T^{-1}(w)$

Quali sono i sottospazi invarianti per un operatore isometrico? Quali sono i suoi ~~autospazi~~ autovalori?

Cerco $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\exists\, v \in \mathbb{R}^n$ con $T(v) = \lambda v$, $v \neq 0$

ESSENDO T ISOMETRICO:

$$T(v) \circ T(v) = v \cdot v$$

$$\|$$

$$(\lambda v)\cdot(\lambda v) = \lambda^2 v \cdot v \Rightarrow \text{Se } \lambda \text{ é autovalore} \Rightarrow$$

$$\lambda^2 = 1 \Rightarrow \boxed{\lambda = \pm 1} \Rightarrow v \text{ é autovettore per } T$$

se la sua immagine é v stesso o il suo opposto.

STUDIAMO LA MATRICE ASSOCIATA A T IN UNA BASE ORTONORMALE { PRENDIAMO LA STESSA BASE NEL DOMINIO E NEL CODOMINIO :

Sia B una base ortonormale per $\mathbb{R}^n$, cerco $[T]_B$

$\Rightarrow$ sia $v \in \mathbb{R}^n \Rightarrow [v]_B = X \Rightarrow [T(v)]_B = [T]_B X$

e posto $w \in \mathbb{R}^n \Rightarrow [w]_B = Y \Rightarrow [T(w)]_B = [T]_B Y \Rightarrow$

$$T(v) \circ w = F(T(v), w) = ([T]_B X)^T \cdot I \cdot Y =$$

[RICORDIAMO CHE I È LA MATRICE ASSOCIATA AL PRODOTTO SCALARE IN UNA BASE ORTONORMALE]

$$= X^T [T]_B^T \cdot Y$$

$$= v \cdot T^{-1}(w) \Rightarrow X^T \cdot I \cdot [T^{-1}]_B \cdot Y = X^T ([T]_B^{-1}) \cdot Y$$

$$\Rightarrow X^T [T]_B^T Y = X^T ([T]_B)^{-1} Y \quad \forall\, X, Y \in \mathbb{R}^n$$

$\Longleftrightarrow$ l'uguaglianza è vera $\Longleftrightarrow [T]_B^T = [T]_B^{-1}$

QUINDI :

La matrice A associata ad un operatore isometrico in una base ortonormale è tale che $A^T = A^{-1}$ (o $AA^T = I$). Una tale matrice è detta ortogonale.

Queste matrici abbiamo visto che sono quadrate e hanno rango massimo, $\Rightarrow$ ci chiediamo qual'è il loro determinante?

So che $AA^T = I \Rightarrow |AA^T| = |I| = 1 \Rightarrow |A||A^T| = 1$

$\Rightarrow |A|^2 = 1 \Rightarrow \boxed{|A| = \pm 1}$

Non vale il ~~ui~~ viceversa cioè se $\det A = \pm 1 \not\Rightarrow$ A ortogonale : Controesempio :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow AA^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq I$$

VEDIAMO ULTERIORI PROPRIETÀ DELLE MATRICI ORTOGONALI :

$$AA^T = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} (C_1, C_2, \dots, C_n) = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} (R_1, R_2, \dots, R_n) =$$

$$= \begin{pmatrix} R_1 \cdot R_1 & R_1 \cdot R_2 & \cdots & R_1 \cdot R_n \\ R_2 \cdot R_1 & R_2 \cdot R_2 & \cdots & R_2 R_n \\ \vdots & & & \\ R_n R_1 & R_n R_2 & \cdots & R_n R_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

PERTANTO :

I vettori riga della matrice ortogonale sono <u>ortonormali</u> e analogamente i vettori colonna della matrice sono <u>ortonormali</u>

<u>Teorema</u> (di struttura per operatori isometrici)

Sia $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un operatore isometrico

$\Longrightarrow \exists$ una base di $\mathbb{R}^n$, ortonormale, B_n, rispetto alla quale $[T]_{B_n} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & & & & & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & & & & & & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & & & & & & 0 \\ & & & -1 & 0 & & & & & \\ & 0 & & 0 & -1 & & & & & \\ & & & & & \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_1 \\ \operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} & \cdots & & & 0 \\ & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & 0 \quad 0 & \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\operatorname{sen}\theta_2 \\ \operatorname{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} & & & 0 \\ & & & & & 0 \quad 0 & & & & 0 \\ & & & & & & & & \begin{pmatrix} \cos\theta_m & -\operatorname{sen}\theta_m \\ \operatorname{sen}\theta_m & \cos\theta_m \end{pmatrix} & \end{pmatrix}$$

INIZIAMO A CONSIDERARE CASI PARTICOLARI : 1) ⊛ (pag. 6)

2) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, B base ortonormale, ad esempio C (CANONICA)

$\boxed{\text{per } n = 2}$

$\Rightarrow [T]_C$ è ortogonale, cioè $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è

ORTOGONALE $\Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} ac + bd = 0 \\ ab + cd = 0 \\ a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ a^2 + c^2 = 1 \\ (ad - bc)^2 = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow ac = -bd \Rightarrow \boxed{\text{per } a \neq 0} \Rightarrow c = -\dfrac{bd}{a}$

sostituendo $c \Rightarrow a a b - \dfrac{bd^2}{\cancel{a}} \cancel{a} \Rightarrow a^2 b - bd^2 = 0$

$\Rightarrow b(a^2 - d^2) = 0$

- $\boxed{b = 0} \Rightarrow c = 0 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ d = \pm 1 \end{cases}$
- $\boxed{b \neq 0} \Rightarrow a^2 = d^2$

Posto $b = 0$ posso avere $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

oppure $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ oppure $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Ora considero le soluzioni $c = -\dfrac{bd}{a}$ e $a^2 = d^2$, $b \neq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = d \Rightarrow c = -b \Rightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ +b & a \end{pmatrix} \Rightarrow a^2+b^2 = 1 \Rightarrow \text{posto } a = \cos\theta,\ b = \operatorname{sen}\theta \Rightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ a = -d \Rightarrow c = b \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow +(a^2+b^2) = +1 \Rightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Ora pongo $a = 0 \Rightarrow$ se $a = 0 \Rightarrow bd = 0 \begin{cases} b \neq 0 \text{ NO} \\ d = 0 \end{cases}$

Se $a = 0$ e $d = 0 \Rightarrow b = \pm 1$ e $c = \pm 1$

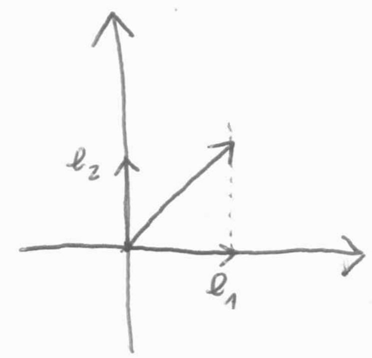
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

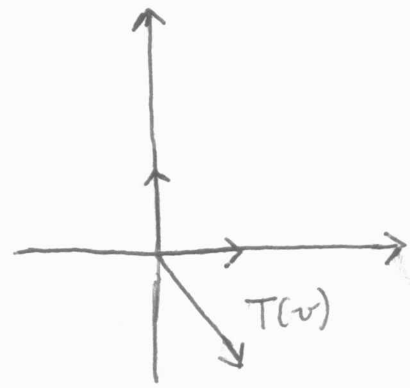
Alle matrici scritte in precedenza aggiungiamo anche

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se considero $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ → ci da una simmetria rispetto all'asse x

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$





Invece la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ci da una simmetria rispetto all'asse y, queste due matrici ci danno una classe di TRASFORMAZIONI ISOMETRICHE: LE simmetrie rispetto ad una retta

Se noi ~~[illegible]~~ (ANALIZZIAMO GEOMETRICAMENTE) tutte le matrici ~~[illegible]~~ che abbiamo trovato, troveremo: un altro tipo di isometria che è la ~~[illegible]~~ rotazione rispetto all'origine, (che è data dalla matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$), di un angolo θ;

~~Allora anche~~ la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ~~[illegible]~~ ci dà una rotazione di π intorno all'origine;

LA MATRICE $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ DÀ UNA ROTAZIONE ATTORNO ALL'ORIGINE DI ANGOLO 0;

SE ANALIZZIAMO TUTTE LE MATRICI RIMANENTI, VEDIAMO CHE ESSE SONO OTTENUTE COME PRODOTTO DI DUE MATRICI TRA QUELLE ELENCATE: AD ESEMPIO

$$\begin{pmatrix} \cos\vartheta & \operatorname{sen}\vartheta \\ \operatorname{sen}\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \operatorname{sen}\vartheta \\ -\operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

PERTANTO LA TRASFORMAZIONE CORRISPONDENTE A TALE MATRICE È DATA DALLA COMPOSIZIONE DELLE ISOMETRIE ASSOCIATE ALLE DUE MATRICI FATTORI.

QUESTO CI PORTA A DARE LA CLASSIFICAZIONE SEGUENTE PER GLI OPERATORI ISOMETRICI DEL PIANO:

SIMMETRIA RISPETTO AD UNA RETTA

ROTAZIONE ATTORNO ALL'ORIGINE.

(*)

1) $T: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ DATA LA BASE CANONICA $\mathcal{B} = \{1\}$

LE UNICHE MATRICI POSSIBILI SONO $[T]_{\mathcal{B}} = (1)$ e $[T]_{\mathcal{B}} = (-1)$

$\Rightarrow$ LE UNICHE ISOMETRIE SU $\mathbb{R}$ SONO $T(x) = x$ (IDENTITÀ)

E $T(x) = -x$ (SIMMETRIA RISPETTO ALL'ORIGINE)