Def: Dati K vettori $v_1 \dots v_K$ di uno spazio vettoriale V diciamo COMBINAZIONE LINEARE dei K vettori il vettore $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_K v_K$, $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_K \in \mathbb{R}$

Esempi. 1) Siano A, B, C tre studenti che devono superare un esame diviso in due parti. Il voto complessivo è la media pesata dei voti ottenuti, visto che la prima parte peserà 5 crediti su 8, mentre la seconda 3.

$\Rightarrow$

	A	B	C
I p.	22	18	27
II p.	28	21	30

Media pesata sarà

Considero $v_1 = (22, 18, 27)$ e $v_2 = (28, 21, 30) \Rightarrow \frac{5}{8}(22, 18, 27) + \frac{3}{8}(28, 21, 30) =$

$\frac{5}{8} v_1 + \frac{3}{8} v_2$

2) Considero K punti materiali di massa $m_1, m_2 \dots m_K$ collocati nei punti $P_1 \dots P_K$ di coordinate $(x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{R}^3$ $i = 1, \dots, K$. Per calcolare il baricentro del sistema dei K punti, darò la massa tot. del sistema $M = \sum_{i=1}^{K} m_i \Rightarrow \underset{(baricentro)}{G} = \frac{m_1}{M} v_1 + \dots \frac{m_K}{M} v_K$

<u>OSSERVAZIONE</u>

In generale, se considero K vettori di $V \Rightarrow$ l'insieme delle combinazioni lineari dei K vettori $W = \{\alpha_1 v_1 + \dots \alpha_K v_K,\ \alpha \in \mathbb{R}\ j = 1 \dots K\}$ è un sottospazio di V, infatti

- $0 \in W$: $0 = 0 v_1 + \dots + 0 v_K$
- Se $w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 \in W$: $w_1 = \alpha_1 v_1 + \dots \alpha_K v_K$ e $w_2 = \beta_1 v_1 + \dots \beta_K v_K \Rightarrow$
  $w_1 + w_2 = \alpha_1 v_1 + \dots \alpha_K v_K + \beta_1 v_1 + \dots \beta_K v_K = \underbrace{(\alpha_1 + \beta_1)}_{\gamma_1} v_1 + \dots + \underbrace{(\alpha_K + \beta_K)}_{\gamma_K} v_K$
- Se $w_1 \in W$, $w_1 = \alpha_1 v_1 + \dots \alpha_K v_K$ e $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda w = \lambda \alpha_1 v_1 + \dots \lambda \alpha_K v_K \in W$

Def: Il sottospazio W è detto il sottospazio generato dai vettori $v_1 \dots v_K$ e si scrive $W = \langle\langle v_1 \dots v_K \rangle\rangle$ (oppure $L(v_1 \dots v_K)$, $\text{Span}(v_1 \dots v_K)$). I vettori $v_1 \dots v_K$ si dicono $\boxed{\text{generatori}}$ del SOTTOSPAZIO W

Considero $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_K v_K = 0$ Se $v_j = (x_{1j}, x_{2j} \dots x_{nj})$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{12} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix} \dots + \alpha_K \begin{pmatrix} x_{1K} \\ \vdots \\ x_{nK} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Svolgo le operazioni indicate, considerando $\overbrace{\text{\ }}^{\text{i vettori}}$ come matrici $\overbrace{\text{\ }}^{n \times 1}$ e ottengo:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 x_{11} + \dots + \alpha_K x_{1K} \\ \vdots \\ \alpha_1 x_{n1} + \dots + \alpha_K x_{nK} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 x_{11} + \dots \alpha_K x_{1K} = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 x_{n1} + \dots \alpha_1 x_{nK} = 0 \end{cases}$$

arrivi ad un sistema scalare (in cui le incognite sono α_j) lineare omogeneo

Def: I vettori $v_1 \dots v_K$ si dicono $\boxed{\text{LINEARMENTE INDIPENDENTI}}$ se $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_K v_K = 0$ $\Longleftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots \alpha_K = 0$, $\alpha_1, \dots, \alpha_K \in \mathbb{R}$

(la sufficienza della condizione è sempre verificata)

Se $a_1v_1 + \dots, a_kv_k = 0$ anche per valori non tutti nulli degli a_j $j = 1, K$ =>
$v_1 \dots v_k$ sono detti **LINEARMENTE DIPENDENTI**

ex: I vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono lin. indipendenti?

imponi l'eq. vettoriale: $a_1v_1 + a_2v_2 = 0$

mi sto chiedendo se esiste solo la soluzione nulla DELL'EQUAZIONE E QUINDI DEL SISTEMA SCALARE ASSOCIATO Σ_0.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

questa è la matrice dei coefficienti di Σ_0 ne calcolo il rango

$rg\, A = 2$

avevo 2 variabili quindi la dimensione dello spazio ambiente era 2 quindi =>

$\dim Sol\, \Sigma_0 = 0$ => LA SOLUZIONE È UNICA: $(0,0)$ =>

=> i vettori sono lin. indipendenti

Osservazione

~~Il rango di una matrice~~

RANGO DI UNA MATRICE

Il rango di una matrice è dato dal numero massimo di vettori colonna o vettori riga linearmente indipendenti.

Significato geometrico:

Considero i vettori geometrici v_1, v_2 => se v_1, v_2 sono lin. dipendenti =>
$\exists\, (a_1, a_2) \neq (0,0)$ tali che $a_1v_1 + a_2v_2 = 0$ => Supponiamo $a_1 \neq 0$ => allora posso dividere per a_1 nell'equazione $a_1 v_1 = -a_2v_2$ => $v_1 = -\frac{a_2}{a_1} v_2$ =>

$v_1, v_2 \in$ stessa retta per l'origine

Se sono indipen. giacciono su rette diverse!

L'insieme delle combinazioni lineari di vettori dip. = retta

" " " " indip. = il piano (quello generato da v_1 e v_2)

$\pi = \langle\langle v_1, v_2 \rangle\rangle$

Invece se consideriamo i vett. geom. v_1, v_2, v_3 => se v_1, v_2, v_3 sono lin. dipendenti
=> $\exists\, (a_1, a_2, a_3) \neq (0,0,0)$ Tali che $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0$ => supponiamo $a_1 \neq 0$

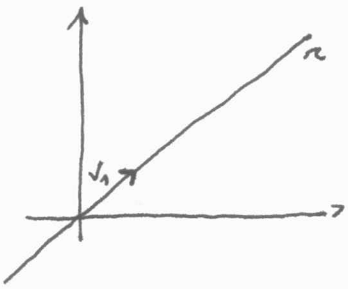
$a_1v_1 = -a_2v_2 - a_3v_3$ $\quad v_1 = -\frac{a_2}{a_1}v_2 - \frac{a_3}{a_1}v_3$ =>

(Il vettore è scritto come combinazione lineare degli altri due quindi non esce dal sottospazio da loro generato)

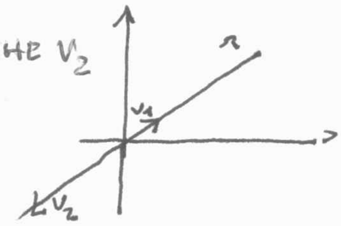
⇒ v_1 è combinazione lineare di v_2, v_3 e quindi sta nel sottospazio $\langle\langle v_2, v_3 \rangle\rangle$

- Non tutti i vettori presi singolarmente sono indip., infatti il vettore nullo è sempre linearmente dipendente

- Prendiamo

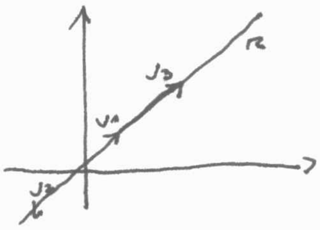


posso scrivere $r = \langle\langle v_1 \rangle\rangle$ se prendo ANCHE v_2



posso scrivere $r = \langle\langle v_1, v_2 \rangle\rangle$?

Sì perché



→ $v_3 = 2v_1 + 0v_2$

Posso avere un no diverso di generatori di uno spazio vettoriale

↓ lin. dipendenti

↓ ma

Def: Un insieme di vettori $v_1 \dots v_k$ definisce una BASE di uno spazio vettoriale V se tali vettori generano V e sono linearm. indipendenti

↓ basta conoscere questi per avere tutti gli altri

↓ $\mathcal{B} = \{v_1 \dots v_k\}$