Geometria, 30/03/2015

Th: Sia $Q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma quadratica, dim $V = n$,
si ha il "Teorema di Sylvester" (o "di Inerzia delle forme quadr. reali")

- Th di Sylvester: Sia F_q la forma polare di $Q \Longrightarrow \exists$ una base di V, F_q - ortonormale, tale che detta $\mathcal{B}_{\perp_n}$ tale base si ha:

$$\longrightarrow [F_Q]_{\mathcal{B}_{\perp_n}} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & & & 0 & \\ & & 1 & & & & & & \\ \hline & & & -1 & & & & & \\ & 0 & & & \ddots & & & 0 & \\ & & & & & -1 & & & \\ \hline & & & & & & 0 & & \\ & 0 & & & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{array}\right)$$

- Inoltre il numero # p di "1" sulla diagonale principale ed il n° q di "-1" sono invarianti

$\longrightarrow$ In generale, ogni matrice $[F_Q]_{\mathcal{B}_\perp}$, con $\mathcal{B}_\perp$ base ortogonale di V, ha lo stesso numero di entrate positive e negative sulla diagonale principale

- dimostrazione: Sappiamo già che $\exists$ basi ortogonali di V, $\mathcal{B}_\perp$, rispetto alle quali $[F_Q]_{\mathcal{B}_\perp}$ è diagonale.
- Prendiamo una di queste basi $\mathcal{B}_\perp \longrightarrow$ posso avere:

$$[F]_{\mathcal{B}_\perp} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \alpha_1^2 & & & & & & & & \\ & \alpha_2^2 & & & 0 & & & 0 & \\ & & \ddots\ \alpha_p^2 & & & & & & \\ \hline & & & -\beta_1^2 & & & & & \\ & 0 & & & -\beta_2^2 & & & 0 & \\ & & & & & \ddots\ -\beta_q^2 & & & \\ \hline & & & & & & 0 & & \\ & 0 & & & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{array}\right)$$

$\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ $\quad \alpha_1^2 = F_Q((v_1, v_1))$. se pongo $\bar{v}_1 = \dfrac{v_1}{\alpha_1}$

(si noti che $\bar{v}_1$ e v_1 appartengono alla stessa retta) si ha:

$$\Longrightarrow F_Q((\bar{v}_1, \bar{v}_1)) = F_Q\left(\left(\frac{v_1}{\alpha_1}, \frac{v_1}{\alpha_1}\right)\right) = \frac{1}{\alpha_1^2} F((v_1, v_1)) = \frac{\alpha_1^2}{\alpha_1^2} = 1$$

Quindi in generale avrò:

$$\bar{v}_J = \frac{v_J}{\alpha_J} \quad \forall J = 1, \dots, p \quad F_Q\left(\left(\frac{v_J}{\alpha_J}, \frac{v_J}{\alpha_J}\right)\right) = \frac{1}{\alpha_J^2} F((v_J, v_J)) = 1$$

Invece:

$$\bar{v}_h = \frac{v_h}{\sqrt{\beta_h^2}} \quad \forall h = p+1, \dots, p+q : F_Q((\bar{v}_h, \bar{v}_h)) = F_Q\left(\left(\frac{v_h}{\sqrt{\beta_h^2}}, \frac{v_h}{\sqrt{\beta_h^2}}\right)\right) =$$

PONGO INOLTRE $\bar{v}_K = v_K \quad \forall K = p+q+1, \dots, n$,

$$= \frac{F((v_h, v_h))}{\beta_h^2} = \frac{-\beta_h^2}{\beta_h^2} = -1 ; \quad \Rightarrow \mathcal{B}_{+n} = \{\bar{v}_1, \dots \bar{v}_n\}$$ E' la base cercata

Ora dimostro che p e q sono invarianti di Q (e quindi di F_Q): essi sono detti rispettivamente "indice di inerzia positivo" e "indice di inerzia negativo".

So che $r_g F_Q = r_g Q = r_g [F_Q]_{\mathcal{B}}$ è invariante per Q: tale rango nella nostra rappresentazione è $p+q$ (invariante)

$\longrightarrow$ se dimostro che p è invariante allora anche q sarà invariante

$\longrightarrow$ per assurdo: suppongo che "p" possa variare, mentre per $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots v_n\}$ ottengo p elementi positivi sulla diagonale, suppongo allora di avere un'altra base ortogonale $\tilde{\mathcal{B}}_1 = \{w_1, \dots w_n\}$ per la quale ottengo t elementi positivi sulla diagonale con $p \neq t$

. Supponiamo allora $p > t$

$\longrightarrow$ sia $\mathcal{U}$ il sottospazio di V, $\mathcal{U} = \langle\langle v_1, \dots, v_p \rangle\rangle$ e sia $\mathcal{W}$ il sottospazio di V, $\mathcal{W} = \langle\langle w_{t+1}, \dots, w_n \rangle\rangle \longrightarrow \mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \{0\}$ perché:

$$\left.\begin{array}{l} \cdot \text{ se } v \in \mathcal{U} \Longrightarrow F((v,v)) \geq 0 \\ \cdot \text{ se } v \in \mathcal{W} \Longrightarrow F((v,v)) \leq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow v = 0$$

$\longrightarrow \dim(\mathcal{U} \oplus \mathcal{W}) = \dim \mathcal{U} + \dim \mathcal{W} = p + n - t > n$ assurdo

(il sottospazio non può avere dim > dim spazio ambiente)

$\Longrightarrow$ p non può essere $> t$ $\longrightarrow$ p può essere $\leq t$.

N.B: ma rifacendo la dimostrazione invertendo i ruoli di p e t si giunge nuovamente allo stesso assurdo $\longrightarrow$ $p = t$

$\Longrightarrow$ p e q sono invarianti di Q c.v.d

. Siamo ora in grado di determinare la "segnatura" di Q

. Proposizione (Metodo di Jacobi).

« sia Q una forma quadratica reale e $[Q]_{\mathcal{B}} = B$, $\mathcal{B}$ base di V, $A = (a_{ij}) \longrightarrow$ consideriamo i "minori principali di Nord-Ovest di A" e supponiamo che tali minori d_J siano $\neq 0$ $\forall J = 1, \dots, n$

$\Longrightarrow \exists$ una base di V, $\mathcal{B}_1$, tale che:

$$[Q]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ & \frac{d_2}{d_1} & & \\ & & \frac{d_3}{d_2} & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & \frac{d_n}{d_{n-1}} \end{pmatrix}$$ »

Da questa proposizione ne conseguono due criteri che danno la "segnatura" di Q:

i) Q è definita positiva $\Longleftrightarrow$ i minori principali di N-O sono tutti > 0
$(p = n, q = 0)$

ii) Q è positiva $\Longrightarrow$ tutti i minori principali sono non negativi
IL VICEVERSA NON È VERO

iii) Q è definita negativa $\Longleftrightarrow$ i minori principali di N-O sono positivi per gli ordini pari e negativi per gli ordini dispari

---

"Metodo di Gauss per la riduzione delle forme quadratiche a forma canonica"

- Sia $Q(x)$ una forma quadratica: $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$;

cambiando base di V, $\mathcal{B}_1$, ed in questa base $[Q]_{\mathcal{B}_1}$ è diagonale
$\longrightarrow$ se le coordinate di V in questa base sono $\{y_1, \dots, y_n\}$,
qual'è la scrittura di $Q(y)$?

$$\Longrightarrow Q(y) = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ii} y_i^2$$: forma canonica di Q

- OSS: il metodo di JACOBI non dice nulla a proposito della BASE ~~[illegible]~~ MENTRE IL METODO DI GAUSS LA FORNISCE

- esempio di applicazione del metodo di Gauss

$Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x_1, x_2) \longmapsto x_1^2 - x_1 x_2 \Longrightarrow Q(x) = x_1^2 - x_1 x_2 = x_1^2 - x_1 x_2 + \frac{x_2^2}{4} - \frac{x_2^2}{4} =$

$$= \left(x_1 - \frac{x_2}{2} \right)^2 - \frac{x_2^2}{4} \quad (*)$$

- Ora cambio le coordinate, pongo : $\begin{cases} y_1 = x_1 - \frac{x_2}{2} \\ y_2 = x_2 \end{cases}$

$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \quad Q(y) = y_1^2 - \frac{y_2^2}{4}$: forma canonica di Q

la matrice è diagonale, ed avrà un termine positivo ed uno negativo :

"segnatura" $= \{1, -1\}$