5 Ottobre 2015

L'insieme delle matrici $\mathcal{M}_{p \times n}$ ad entrate reali è un gruppo additivo commutativo (o abeliano).

In generale:

Se su un insieme A mettiamo un'operazione "$*$" binaria interna (gli elementi della coppia appartengono allo stesso insieme, così come il risultato) che sia associativa, esista elemento neutro e $\forall$ elemento detto esista il suo reciproco $\Longrightarrow (A, *)$ è detto <u>GRUPPO</u>.

Se "$*$" è commutativa $\Longrightarrow (A, *)$ è un gruppo commutativo (o ABELIANO).

Esempio 1 $(\mathbb{R}, +)$ è gruppo, abeliano.

Esempio 2 $(\mathbb{R}, \cdot)$ è un gruppo? NO, PERCHÈ se si include anche l'elemento ZERO $\Rightarrow \nexists$ il reciproco di 0

$\Longrightarrow$ considero $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$; adesso è un gruppo moltiplicativo, abeliano.

Se considero l'insieme $a = \mathbb{N} \Longrightarrow (\mathbb{N}, +)$ è un gruppo? NO, non c'è il reciproco, CIOÈ L'OPPOSTO DI OGNI ELEMENTO; COME CONSEGUENZA:

$x + 2 = 0 \ \nexists$ Sol $| \in \mathbb{N}$.

Considero un insieme a con due operazioni:

$(a; *, \square)$.

Se $(a; *)$ è un gruppo abeliano; $\square$ sia associativa, $\exists$ elemento neutro in a per $\square$ e inoltre valga la proprietà distributiva di "$\square$" rispetto a "$*$", cioè: $a \,\square (b * c) = (a \,\square\, b) * (a \,\square\, c) \quad \forall a, b, c \in a$.

$\Rightarrow (a, *, \square)$ È DETTO ANELLO CON UNITÀ

Esempio 3: $(\mathbb{R}; +, \cdot)$ [VALE LA DISTRIBUTIVA DI $\cdot$ RISPETTO A $+$ $a \cdot (b + c) = ab + ac$, e Avevamo già definito che $(\mathbb{R}, +)$ è gruppo abeliano.]

è un anello con unità.

Se $\square$ gode della proprietà commutativa, allora $(a; *, \square)$ è <u>ANELLO COMMUTATIVO</u>.

Esempio 4: $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$ è l'<u>anello degli interi</u>.

$(\mathbb{Z}, +)$ è gruppo abeliano

Per $\cdot$, in più, vale la proprietà distributiva.

Considero l'insieme $(a; *, \square)$: SE SI verifica che $(a, *)$ sia un gruppo commutativo,

$(a - \{\text{elemento neutro di } *\}, \square)$ sia un gruppo commutativo e inoltre vale la distributiva di $\square$ rispetto ad $* \Rightarrow (a, *, \square)$ è un <u>CAMPO</u>.

Abbiamo il CAMPO dei numeri reali, razionali (IL CAMPO DEI NUMERI,)
(con le operazioni di somma e prodotto).

Ci sarà anche il campo dei numeri complessi.

- Il CAMPO è un'estensione dell'ANELLO.

CONSIDERIAMO ORA ALTRE
OPERAZIONI con le MATRICI (continuazione).

- Prodotto per uno scalare

Introduco in $\mathcal{M}_{p\times n}$ l'operazione di moltiplicazione per uno scalare $\alpha \in \mathbb{R}$. Data $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,n}}$

$$\Longrightarrow \quad \alpha \cdot A = (\alpha\, a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,n}}$$

Esempio $\alpha = \sqrt{2}$ e $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}_{3\times 3} \Longrightarrow$

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} & 5\sqrt{2} & 6\sqrt{2} \\ 7\sqrt{2} & 8\sqrt{2} & 9\sqrt{2} \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

Proprietà:

Proprietà associativa

- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall A \in \mathcal{M}_{p\times n}$

Proprietà distributiva

- $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall A, B \in \mathcal{M}_{p\times n}$.

- Esiste elemento neutro $[\alpha = 1]$.

Questa ~~...~~ operazione può estendere la moltiplicazione TRA numeri REALI (se le matrici 1×1 VENGONO IDENTIFICATE CON I NUMERI)

MOLTIPLICAZIONE TRA MATRICI

[OSSERVAZIONE: QUALUNQUE TEORIA CHE GENERALIZZA UNA PRECEDENTE, GIÀ ESISTENTE, deve rendere possibile il rispetto delle proprietà e delle regole precedenti, CHE QUINDI DEVONO CONTINUARE A VALERE NEL CASO PARTICOLARE RAPPRESENTATO DALLA PRECEDENTE TEORIA]

- Prodotto riga per colonna.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

[Il numero delle entrate nelle righe della prima matrice deve essere uguale AL NUMERO delle entrate delle colonne della seconda]

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}_{2\times 3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 9 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

(Si moltiplicano le entrate di UNA riga della prima matrice, con le entrate di UNA colonna della seconda MATRICE E POI SI SOMMANO TALI PRODOTTI TRA LORO; COSÌ SI OTTIENE UNA ENTRATA DELLA MATRICE PRODOTTO.)

1) il numero di colonne della prima matrice del prodotto deve coincidere con il numero di righe della seconda matrice del prodotto: QUESTA È LA CONDIZIONE PER POTER MOLTIPLICARE DUE MATRICI TRA LORO.

ES: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 9 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$2\cdot 1 + 3\cdot 2 + 4\cdot 9 = 44 = a_{1,1}$

$= 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + 4(-1) = 14 = a_{1,2}$

$2\cdot(-1) + (3\cdot 0) + 4\cdot 1 = 2 = a_{1,3}$

$5\cdot 1 + 6\cdot 2 + 7\cdot 9 = 80 = a_{2,1}$

$5\cdot 3 + 6\cdot 4 + 7(-1) = 32 = a_{2,2}$

$5\cdot(-1) + 5(0) + 5\cdot 1 = 2 = a_{2,3}$

$$\begin{pmatrix} 44 & 14 & 2 \\ 80 & 32 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

LA MATRICE PRODOTTO HA:

2 righe come la prima matrice

3 colonne come la seconda matrice

Possiamo moltiplicare due matrici del tipo

$A_{p\times n}$ e $B_{n\times q}$ ed il risultato è una

matrice $C_{p\times q}$.

Quando le matrici sono 1×1 (TALE PRODOTTO) estende l'operazione tra numeri reali.

Considero $v_1 = (2,3,4)$ e $v_2\,(1,-1,2) \Rightarrow$

$$v_1 \cdot v_2 = 2-3+8 = 7$$

La moltiplicazione (DATA TRA) vettori si può considerare come prodotto matriciale.

$$(2\ 3\ 4)_{1\times 3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}_{3\times 1} = (7)_{1\times 1}$$

Proprietà dell'operazione.

É associativa? $\left(A_{p\times n} \cdot B_{n\times q}\right) \cdot C_{q\times K} = D_{p\times K}$

$$A_{p\times n} \cdot \left(B_{n\times q} \cdot C_{q\times K}\right) = D_{p\times K}$$

La proprietà associativa è verificata (DIMOSTRARLO)

∃ elemento neutro? Se ∃ elemento neutro, deve essere unico! VEDIAMO UN ESEMPIO: LA MATRICE (a_{ij}) È ELEMENTO NEUTRO SE VERIFICA L'EQUAZIONE:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}_{2\times 3} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

$$\begin{cases} a_{11} + 2a_{21} + 3a_{31} = 1 \\ \vdots \\ \end{cases}$$

Risolvere il sistema a casa.

9 variabile.

Si trova l'elemento che moltiplicato alla matrice non la fa variare $\longrightarrow$ MATRICE IDENTITÁ 3×3

$$I_{3,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

Esiste l'elemento neutro SE RIUSCIAMO á trovare una $\underbrace{\text{matrice}}_{\text{UNICA}}$ che moltiplicata per un'altra matrice, DÀ COME RISULTATO LA MATRICE DATA.

Nell'insieme delle ~~xxxxx~~ matrici quadrate con UN CERTO ordine, il prodotto appartiene allo STESSO insieme di matrici quadrate.

Nell'insieme $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ il prodotto é associativo, sempre possibile, $\exists$ el. neutro $(I_{n \times n})$.

é commutativo ?

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}} \underset{B}{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Il prodotto non é commutativo.

Esiste il reciproco ?