Sia A una matrice reale simmetrica $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ 06/04/2016

PROPOSIZIONE: tutte le radici caratteristiche di A sono reali

DIMOSTRAZIONE: Polinomio caratteristico $|A-\lambda I|=0$, sia λ_0 una radice

$\Rightarrow |A-\lambda_0 I|=0$ ← rango della matrice non sarà massimo

Considero il sistema associato $\Sigma_0: (A-\lambda_0 I)X=0 \Rightarrow \exists$ una soluzione non nulla $C \in \mathbb{C} \Rightarrow (A-\lambda_0 I)C=0 \Rightarrow AC-\lambda_0 IC=0$

$\Rightarrow AC=\lambda_0 C$ pongo $C=\begin{pmatrix} c_1\\ \vdots \\ c_n\end{pmatrix}$

→ consideriamo il suo complesso coniugato $\overline{C}=\begin{pmatrix}\overline{c_1}\\ \overline{c_2}\\ \vdots \\ \overline{c_n}\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \overline{C}^T AC=\overline{C}^T\lambda_0 C \Rightarrow \underbrace{\overline{C}^T_{1\times n} A_{n\times n} C_{n\times 1}}_{\text{SCALARE}}=\lambda_0 \underbrace{\overline{C}^T C}_{\substack{1\times 1\\ \text{SCALARE}}}$$

$$\overline{C}^T C=(\overline{c_1},\overline{c_2},\dots,\overline{c_n})\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\overline{c_i}c_i \in \mathbb{R}^+$$

ricavando λ_0

$$\lambda_0=\frac{\overline{C}^T AC}{\overline{C}^T C}$$

Voglio dimostrare che $\overline{C}^T AC \in \mathbb{R}$ cioè $\overline{C}^T AC=\overline{\overline{C}^T AC} \Rightarrow C^T\overline{A}\,\overline{C}=C^T A\overline{C}$

INOLTRE $\overline{C}^T AC \underset{\substack{\uparrow\\ \text{PERCHÉ SCALARE}}}{=} (\overline{C}^T AC)^T=C^T A^T\overline{C} \underset{\substack{\downarrow\\ A \text{ è simmetrica}\\ \text{dunque } A^T=A}}{=} C^T A\overline{C}$ //

$\Rightarrow C^T AC$ è reale perché corrisponde al suo coniugato. $\Rightarrow \lambda_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow$ tutte le radici sono REALI

• Data $Q: V\to\mathbb{R}$ con $\dim V=n \Rightarrow$ inizialmente sia B la base di V per la quale $[Q]_B=A \Rightarrow$ cerchiamo una base $\tilde{B} \mid [Q]_{\tilde{B}}=D \Rightarrow \exists\, S$ invertibile quadrata $\mid D=S^T A S$

→ Se la matrice S è tale che $S^T=S^{-1} \Rightarrow$ otteniamo $D=S^{-1}\cdot A\cdot S$ quindi A risulta simile a D e quindi diagonalizzabile!

• Una matrice S che soddisfa a $S^T=S^{-1}$ è detta $\boxed{\text{ORTOGONALE}}$ $\Rightarrow S$ è tale che $SS^T=I$.

VEDIAMO COME SONO I VETTORI RIGA E COLONNA DI UNA MATRICE ORTOGONALE

Sia $S=\begin{pmatrix}s_{11}&\cdots&s_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ s_{n1}&\cdots&s_{nn}\end{pmatrix} \Rightarrow SS^T=\begin{pmatrix}s_{11}&\cdots&s_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ s_{n1}&\cdots&s_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s_{11}&\cdots&s_{n1}\\ \vdots&&\vdots\\ s_{1n}&\cdots&s_{nn}\end{pmatrix}=I=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\ 0&1&&\vdots\\ \vdots&&\ddots&\\ 0&\cdots&&1\end{pmatrix}$

//

$$\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{n}s_{1i}^2 & \sum_{i=1}^{n}s_{1i}s_{2i} & \cdots\\ \vdots & & \end{pmatrix}=\left(\sum_{i=1}^{n}s_{ji}s_{ki}\right)_{j,k=1,\dots,n}$$

ottenuto mediante prodotto matriciale tra ~~righe~~ VETTORI riga e colonne

TALE PRODOTTO non è altro che il prodotto scalare usuale TRA TALI VETTORI

<u>prodotto scalare usuale</u> fra $v=(v_1,\dots,v_n)$ e $w(w_1,\dots,w_n) \Rightarrow v \cdot w = (v,w) = \langle v,w \rangle$

come indichiamo il prodotto scalare

$= v^T w$

: ricordo che il prodotto scalare e' una <u>forma bilineare</u>: QUINDI
$\Rightarrow$ DOBBIAMO LAVORARE NELLO <u>SPAZIO EUCLIDEO</u> (CIOE' IN UNO SPAZIO VETTORIALE CON forma bilineare simmetrica definita positiva, reale)

[se non utilizzano una forma bilineare simmetrica positiva si passa in spazi non euclidei]

$\Rightarrow$ i vettori riga (e colonna) della matrice S devono essere ortonormali rispetto al prodotto scalare. AFFINCHE' $S^T S = S S^T = I$!

VEDI ⊛ A PAGINA 3

$\Rightarrow$ le matrici simmetriche reali sono ortogonalmente diagonalizzabili.

<u>ESERCIZIO</u>

$Q(x) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + x_3^2$

$$[Q]_e = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 4-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$= - \mathbb{R}$

<u>Definizione</u>: Uno spazio vettoriale reale e' detto SPAZIO EUCLIDEO se e' munito di una forma bilineare simmetrica definita positiva.

<u>ESEMPIO</u>: "$\cdot$" $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ dove $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ e' forma bilineare simmetrica

$$X \cdot Y = Y \cdot X$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad \sum_{i=1}^{n} y_i x_i$$

e' definita positiva? $X \cdot X \geq 0$ ed e' $= 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$ sempre se $(x_1,\dots,x_n) \neq 0$

In $\mathbb{R}^3$ "$\cdot$" $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \rightarrow [\text{"}\cdot\text{"}]_e = \begin{pmatrix} e_1\cdot e_1 & e_1 \cdot e_2 & e_1 \cdot e_3 \\ e_2 \cdot e_1 & e_2 \cdot e_2 & e_2 \cdot e_3 \\ e_3 \cdot e_1 & e_3 \cdot e_2 & e_3 \cdot e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

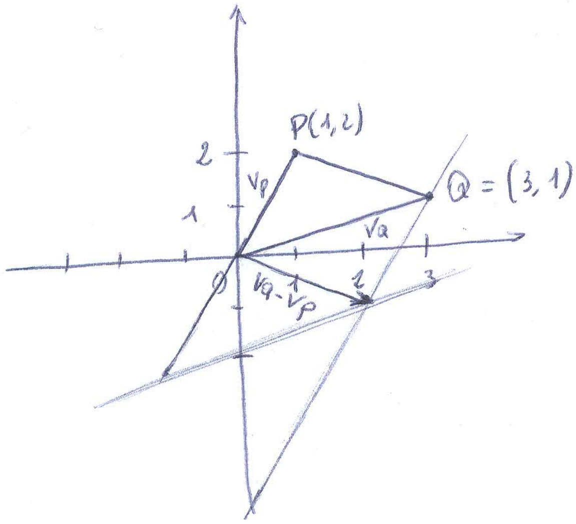
Dato "$\cdot$" la forma quadratica ad esso associata e' $Q(x) = x \cdot x = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \|x\|$ e' la norma di ~~v~~ con $[v] = X$, cioe' la sua "<u>lunghezza</u>"

• Se $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \|v\| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

Se voglio misurare la distanza tra 2 punti in $\mathbb{R}^n$: $P = (x_1,\dots,x_n)$, $Q = (y_1,\dots,y_n)$

$\Rightarrow$ CALCOLO LA NORMA di $v_Q - v_P \Rightarrow \|v_Q - v_P\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$

Esempio:



$V_Q - V_P = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n)$

e trovo $\sqrt{\|V_Q - V_P\|} = \underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}}_{\text{NORMA}}$

$d(P,Q) = \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{5}$

(*)

Pertanto se lavoriamo in uno spazio vettoriale V munito del prodotto scalare, possiamo pensare alla matrice A come matrice di un operatore T che viene diagonalizzato tramite una matrice ortogonale S, secondo la relazione di similitudine $D = S^{-1} A S$. Possiamo allora usare i metodi della diagonalizzazione cercando le radici caratteristiche della matrice A, cioè gli autovalori dell'operatore, che daranno la matrice D, e relativi autovettori, ortonormali rispetto al prodotto scalare, che forniranno i vettori colonna della matrice S e quindi i vettori della base $\mathcal{B}$ di V rispetto alla quale $[T]_{\mathcal{B}}$ è diagonale; poiché però $S^{-1} = S^{T} \Longrightarrow D = S^{T} A S$ cioè $A \sim_c D$ e quindi la matrice associata alla forma quadratica nella base $\mathcal{B}$ è ancora D.

Pertanto come prima conseguenza: possiamo usare i metodi propri della diagonalizzazione per determinare la forma canonica di una forma quadratica

Come seconda conseguenza: le matrici simmetriche reali sono ortogonalmente diagonalizzabili, in quanto riusciamo sempre a trovare una base $\mathcal{B}$ di V rispetto alla quale la matrice della forma canonica è diagonale.