Che tipo di isometria è ? 9/05/16

ES 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \leftarrow \det = -1 \qquad T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \text{ operatore isometrico} \qquad [T]_{B_{\perp m}} = A$$

(Le colonne della matrice sono le immagini di A)

È uno SPECCHIAMENTO rispetto un piano.

Individuiamo il piano rispetto al quale abbiamo il ribaltamento:

$$B_{\perp m} = \{v_1, v_2, v_3\} = T(v_1) = 1 v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = v_1$$

$$T(v_2) = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = v_2$$

$$T(v_3) = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 - 1 \cdot v_3 = -v_3$$

← la retta generata è l'AUTOSPAZIO relativo all'autovalore $-1$ (di molteplicità 1) $\Rightarrow E_{-1} = \langle\langle v_3 \rangle\rangle$

$$[T]_{B_{\perp m}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x, y, -z)$$

Il piano è quello relativo all'autovettore 1, in questo caso è lo specchiamento rispetto $z=0$.

ES 2:

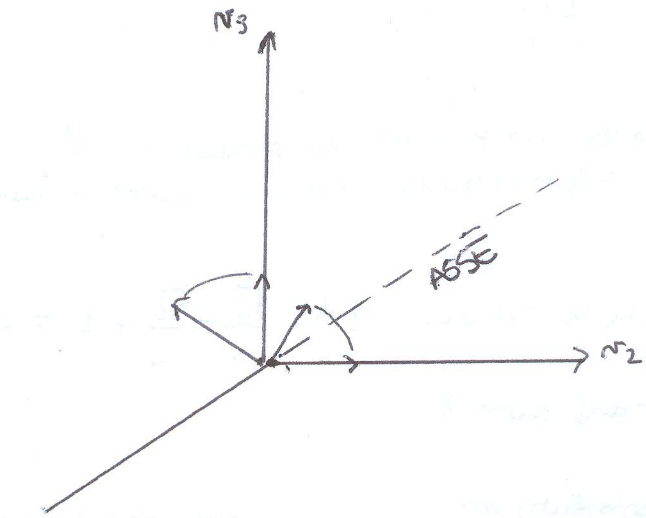
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \leftarrow \text{è una ROTAZIONE}: \quad \rho: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$\rho(v_1) = v_1$ ← autovettore relativo all'autov. 1

L'applicazione è lineare: $\alpha v_1$ viene mandato in se stesso. I vettori di questa retta non vengono mutati. Ne consegue che sia proprio la retta attorno alla quale avviene la rotazione.

Il secondo vettore di base $\rho(v_2) = 0 v_1 + \cos\theta v_2 + \operatorname{sen}\theta v_3$

" terzo " $\rho(v_3) = 0 \cdot v_1 - \sin\theta v_2 + \cos v_3$ ← I vettori ruotano nel piano, attorno all'origine, di un angolo $\theta$.



Ci serve conoscere:

- L'ASSE di rotazione
- Piano su cui avviene la rotazione ($\perp$ alla retta di rotazione)
  ↓
  (e tutti quelli //: infiniti)
- Angolo di rotazione $\theta$
- verso
  ↓

Matrice formata da
- vettore della retta
- n. piano
- n. trasformato

→ Dopodiché segue la regola della mano dx.

Vado a calcolare il det della matrice (prod vettoriale)
- $\boxed{\det > 0}$ => rotazione positiva
- $\boxed{\det < 0}$ => rot. negativa

ESERCIZIO: Studiare la trasf. geometrica associata in base canonica di $\mathbb{R}^3$ alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

A é ortogonale ?

Vado a controllare se sia ortogonale, in modo da ricollegarmi alle isometrie studiate

det = 1 non é sufficiente ad affermare l'ortogonalitá, ma ne é conseguente.

- inversa = trasposta

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

É ORTOGONALE → operatore isometrico in $\mathbb{R}^3$

La matrice é simmetrica.
Troveremo una matrice simile a questa, come quelle giá studiate per $\mathbb{R}^3$.
Non ci sono rotazioni, perché non diagonalizzabile. Per similitudine si mantiene il det.

$$|A| = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = -1$$

Per similitudine si mantiene anche la traccia, $\operatorname{Tr} A = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 1$

La matrice che ci caratterizza la trasf geom é

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo compiuto un cambiamento di base.

← Specchiamento rispetto ad un piano

Vado a cercare il piano. Cioè vado a cercare l'autospazio relativo all' autovettore +1 (molteplicità 2)

Trovo $E_1$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2-1 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A-\lambda I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

PIANO $\begin{cases} \frac{\sqrt{2}-2}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x - \left(\frac{\sqrt{2}+2}{2}\right)y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}-2}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}-2}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} \sqrt{2}-2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2}-2 \end{vmatrix} =$

$rg = 1 \Rightarrow$ 2 righe linearmente dipendenti

É sufficiente prendere $(\sqrt{2}-2)x + \sqrt{2}y = 0$ ← PIANO DI SPECCHIAMENTO

Qual è la base associata?

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$$

ortogonali

lo prendiamo sulla retta $\perp$ al piano, e prenderlo normalizzato

Base ortonormale cercata:

$$B_\perp = \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2-\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2}-2 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ortogonale al piano

$(\sqrt{2}-2)x + \sqrt{2}y = 0$

$y = \frac{+2-\sqrt{2}x}{\sqrt{2}}$

Trovo quello contenuto, ma ortogonale, risolvo il sistema

$\begin{cases} \sqrt{2}x + (2-\sqrt{2})y = 0 \\ (\sqrt{2}-2)x + \sqrt{2}y = 0 \end{cases}$

1° vettore normalizzato

$$B_{\perp n} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} \\ \frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow [T]_{B_{\perp n}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\|v_1\| = \sqrt{8-4\sqrt{2}} = 2\sqrt{2-\sqrt{2}}$

ESERCIZIO 2

4

Studiare la trasf. geom. associata in base $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$ alla matrice $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

• A è ortogonale? $\underset{\text{non diagonalizzabile}}{AA^T = I} \to$ SI

La matrice non è simmetrica. Ci sarà una rotazione QUINDI POSSIAMO AVERE 2 POSSIBILITÀ PER LA MATRICE FINALE SIMILE A QUELLA INIZIALE

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad o \quad \cancel{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}} = ?$$

$-1 \neq 1$

Se $|A|$ deve essere mantenuto PER SIMILITUDINE: $|A| = 1 \Rightarrow$ LA MATRICE SARÀ LA PRIMA

[$\det |A| = -1 \Rightarrow$ ribaltamento + rotazione]

Studiamo la rotazione

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \leftarrow \text{matrice finale}$$

T è una rotazione di $\mathbb{R}^3$ attorno all'asse (dato dall'autovalore ~~[illegible]~~ 1, unica radice caratteristica) dato dall'autospazio $E_1$:

$$\begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & -2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Trovo un minore $\neq 0$; AD ESEMPIO, $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow E_1 =$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x - 2y + z = 0 \\ -\cancel{2}x \cancel{+2}y + \cancel{2}z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y - \cancel{z} - 2y \cancel{+z} = 0 \\ -x = y - z \end{cases} = \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases} \quad \boxed{\text{ASSE}}$$

Forma parametrica $\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

I PIANI DI ROTAZIONE SONO PERPENDICOLARI ALL'ASSE $\Rightarrow$

Il piano di rotazione passante per l'origine è $x + z = 0$

Cerco l'ang. di rotazione (angolo piano): se TROVO $\cos\theta$ e $\sin\theta$, HO TROVATO $\theta \Rightarrow$

1° MODO: DETERMINO B:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{coincide } S^T}}{S^{-1}} A S$$

1° colonna: coordinate DI UN VETTORE SULL'ASSE DI ROTAZ.
2° : " " DI UN VETTORE NEL PIANO DI ROTAZIONE
3° : " " " " " NEL PIANO DI ROTAZIONE, $\perp$ ALL'ALTRO VETTORE DEL PIANO

S È LA MATRICE DEL CAMBIAMENTO DI BASE COSÌ DEFINITA:

I VETTORI CHE FORMANO S DEVONO ESSERE NORMALIZZATI $\Rightarrow$ S È ORTOGONALE

$Tr\,A = Tr\,B$ ⇒ PER LA SIMILITUDINE

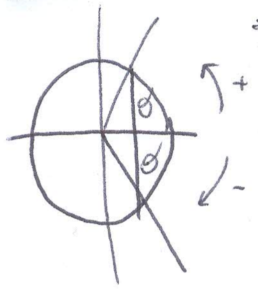
↑ MATRICE FINALE

$\boxed{\text{II MODO PER TROVARE } \vartheta:}$

⇒ $Tr\,A = \frac{5}{3} = Tr\,B = 2\cos\vartheta + 1$ ⇒

$\frac{1}{3} = \cos\vartheta$

$\vartheta = \arccos\frac{1}{3}$




: CI SONO, TRA $0 \le 2\pi$, 2 ANGOLI CON $\cos\vartheta = \frac{1}{3}$:

$\sin^2\vartheta = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow \sin\vartheta = \pm\sqrt{\frac{8}{9}}$

PER STABILIRE QUALE DEI DUE ANGOLI DEVO PRENDERE, DEVO TROVARE $\sin\vartheta$, CIOÈ STABILIRE IL VERSO DELLA ROTAZIONE:

Cerco il verso della rotazione:

$x + z = 0$ $\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ VETTORE DEL PIANO

VETTORE SU ASSE

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1/3 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-4/3} \\ 1 & -1 & -1/3 \end{vmatrix} = \frac{4}{3}(-2) < 0$ SINISTRORSA

TRASFORMATO

$T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -4/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$

PER STABILIRE IL VERSO DELLA ROTAZIONE, PRESO UN VETTORE SULL'ASSE, CIOÈ STABILITO IL SUO VERSO, VEDIAMO COME UN VETTORE DEL PIANO SI MUOVE PER RAGGIUNGERE LA SUA IMMAGINE, SECONDO LA REGOLA DELLA MANO DESTRA ⇒

Diamo la matrice finale:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & +\sqrt{\frac{8}{9}} \\ 0 & -\sqrt{\frac{8}{9}} & 1/3 \end{pmatrix}$$

DOPO AVER FORMATO UNA MATRICE CHE HA COME 1ª COLONNA LE COORDINATE DI UN VETTORE DELL'ASSE DI ROTAZIONE, COME 2ª COLONNA UN VETTORE DEL PIANO DI ROTAZIONE, COME 3ª COLONNA IL SUO TRASFORMATO TRAMITE T, NE VALUTIAMO IL DETERMINANTE: ⊛

• Base $\perp_n$ che ci dà la matrice finale.

$\mathcal{B}_{\perp_n} = \left\{ \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \right\}$

↑ VETTORE DELL'ASSE (NORMALIZZATO)

↑ VETTORE NEL PIANO DI ROTAZIONE (NORMALIZZATO)

↑ VETTORE DEL PIANO DI ROTAZIONE ORTOGONALE AL PRIMO E NORMALIZZATO.

⊛ SE IL DETERMINANTE È POSITIVO ⇒ LA ROTAZIONE È DESTRORSA

SE IL DETERMINANTE È NEGATIVO, È SINISTRORSA