SPAZIO EUCLIDEO:

è uno spazio vettoriale reale munito di una forma bilineare simmetrica reale definita positiva.

esempi:

1) $\mathbb{R}^n$ con il prodotto scalare standard $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

dati $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ $(X, Y) \longmapsto x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$

2) Sia V lo spazio vettoriale $V = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R}, \text{continua} \}$

$V = C^0_{[a,b]}$ e considero $F: C^0_{[a,b]} \times C^0_{[a,b]} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(f, g) \longmapsto \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

F è un prodotto scalare?

-> deve essere:
1. forma bilineare
2. simmetrica
3. definita positiva

1. $F((f_1+f_2, g)) = F((f_1, g)) + F((f_2, g))$

$$\int_a^b (f_1+f_2)\, g(x)\, dx = \int_a^b (f_1 g + f_2 g)(x)\, dx = \int_a^b f_1 g(x)\, dx + \int_a^b f_2 g(x)\, dx$$

$$F((f_1, g)) + F((f_2, g))$$

è verificata la linearità SULLA PRIMA COMPONENTE. ASSIEME A DIMOSTRARE CHE:

$$\int_a^b ((\alpha f) g)(x)\, dx = \int_a^b (\alpha (f \cdot g))(x)\, dx = \alpha \int_a^b (f \cdot g)(x)\, dx = \alpha F((f, g))$$

ANALOGAMENTE PER LA SECONDA COMPONENTE.

2. $\int_a^b fg(x)\, dx = \int_a^b gf(x)\, dx$ simmetrica

3. valuto $F((g, g)) = \int_a^b (g g)(x)\, dx = \int_a^b g^2(x)\, dx \geq 0$ l'integrale definito di una funzione > 0 è sempre maggiore di 0

$\int_a^b g^2(x)\, dx = 0 \iff g = 0$ (ovviamente escludiamo $a = b$)

F è un prodotto scalare $\Rightarrow C^0_{[a,b]}$ è uno spazio euclideo.

3) $\mathbb{R}_n[x] = \{$ polinomi nella variabile x a coefficienti reali fino al grado $n \}$

su $\mathbb{R}_n[x]$ metto la forma $F: \mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(p, q) \longmapsto \int_{-1}^{1} p(x)\cdot q(x)\, dx$$

anche questa è una forma bilineare simmetrica, positiva (dimostrare), F è quindi un prodotto scalare e $\mathbb{R}_n[x]$ è uno spazio euclideo.

~~Considera VB~~

Dato un prodotto scalare resta definita una forma quadratica a esso associata: $Q(x) = F(x,x)$ anch'essa definita positiva.

Quali forme quadratiche (ASSOCIATE ALLE FORME BILINEARI) sono date sugli spazi euclidei SOPRA DEFINITI?

1) se $F((x,y)) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \Rightarrow Q(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Rightarrow \|v\| = \sqrt{Q(x)}$ con $[v]_B = x$

(in uno spazio euclideo la norma di un vettore è data sempre da $\sqrt{Q(x)}$)

2) $\|v\| = \sqrt{Q(g)}$ con $Q(g) = \int g^2(x)\,dx$

In $\mathbb{R}^4$ posso mettere la forma quadratica $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = Q(x) \Rightarrow$ $\mathbb{R}^4$ è spazio euclideo.

Posso dotare $\mathbb{R}^4$ della forma quadratica $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c x_4^2$ $c>0$

$Q(x)$ non è più definita positiva; è indeterminata.

$Q(x)$ è detta forma di MINKOWSKI e $\mathbb{R}^4$ munito di queste forma è: lo SPAZIO della RELATIVITÀ RISTRETTA. (c = velocità della luce)

TEOREMA DI SCHWARZ

Dati i vettori $v, w \in V$ spazio euclideo e poniamo $[v]_B = X$ e $[w]_B = Y$

$\Rightarrow |X\cdot Y| \leq \|X\|\|Y\|$

Dimostrazione:

1° caso: supponiamo $w = \lambda v$ (linearmente dipendente) $\Rightarrow |X\cdot(\lambda X)| = |\lambda (X\cdot X)| = |\lambda||X\cdot X|$

$\|X\|\|\lambda X\| = |\lambda|\,\|X\|^2 = |\lambda||X\cdot X|$

se X e Y sono linearmente dipendenti $\Rightarrow |X\cdot Y| = \|X\|\|Y\|$

2° caso: supponiamo x e y non linearmente dipendenti

$\Rightarrow x$ e y costituiscono una base di un sottospazio U 2-dimensionale di V

$\Rightarrow$ "$\cdot$"$|_U$ (considero la restrizione dell'applicazione al sottospazio) $U \times U \longrightarrow \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ la matrice associata sarà: $\begin{pmatrix} x\cdot x & x\cdot y \\ y\cdot x & y\cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx & xy \\ xy & yy \end{pmatrix}$

$(x\cdot x)(y\cdot y) - (xy)^2 > 0$ (per JACOBI)

$(x\cdot x)(y\cdot y) > (xy)^2 \Rightarrow \|x\|^2\|y\|^2 > |xy|^2 \Rightarrow \|x\|\|y\| > |x\cdot y|$ c.v.d.

11.06.16

Abbiamo dimostrato $\frac{|x\cdot y|}{\|x\|\,\|y\|} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{x\cdot y}{\|x\|\,\|y\|} \leq 1$

$\Rightarrow$ posso porre $\frac{x\cdot y}{\|x\|\,\|y\|} = \cos\alpha$ con α angolo tra i vettori x e y

$\Rightarrow x\cdot y = \|x\|\,\|y\| \cos\alpha$

Ricordo che x e y sono ortogonali (cioè ortogonali rispetto al prodotto scalare) se $x\cdot y = 0$, quindi se $\|x\|\,\|y\|\cos\alpha = 0$: se $x \neq 0 \wedge y \neq 0$, POICHÈ x e y sono ortogonali
$\Longrightarrow \cos\alpha = 0$, cioè $\alpha = (2k+1)\frac{\pi}{2}$

DEFINIZIONE: due vettori sono PERPENDICOLARI se l'angolo fra di essi è $\alpha = (2k+1)\frac{\pi}{2}$; RESTRINGENDOCI ALL'ANGOLO GIRO, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ o $\frac{3\pi}{2}$

Disuguaglianza triangolare:

$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

dimostrazione:

introduciamo disuguaglianza di Schwartz

$\|x+y\|^2 = (x+y)(x+y) = (x\cdot x) + (y\cdot x) + (x\cdot y) + (y\cdot y) = \|x\|^2 + 2(x\cdot y) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\,\|y\|$

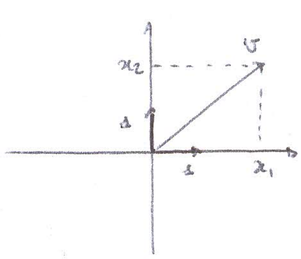
$= (\|x\| + \|y\|)^2$ c.v.d.

$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x+y\| \rightarrow$ conseguenze (da fare)

Teorema di Pitagora

Siano v e w vettori perpendicolari $\Rightarrow \|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$
(conseguenza della disuguaglianza triangolare)
caso particolare se $v\cdot w = 0$

Sia B una base ORTONORMALE dello spazio euclideo : $B = \{v_1, \dots v_n\} \Rightarrow v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$
$\Rightarrow v\cdot v_j = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right)\cdot v_j = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \cdot v_j = x_j \underbrace{v_j\cdot v_j}_{\text{sono ortonormali } v_j\cdot v_j = 1} = x_j$



NOTA: se B è base $\perp n \Rightarrow$ posto $[v]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e $[w]_B = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow v\cdot w = x^T \cdot I\, y = x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$
In un qualunque spazio, se faccio un prodotto scalare tra due vettori in una base ortonormale, ottengo: PRODOTTO SCALARE STANDARD.