11 Maggio 2016

Operatori Simmetrici in uno spazio euclideo $\mathbb{R}^n$.

Definizione: un operatore $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e' detto simmetrico se $T(u)\cdot v = u \cdot T(v)$ $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$. ('CIOE' SE L'OPERATORE AGGIUNTO A T COINCIDE CON T)

Sia B_{1n} una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$: cerco la matrice associata a T nella base ortonormale $[T]_{B_{1n}} = A$

Considero le coordinate dei vettori nella base B_{1n}

$$[u]_{B_{1n}} = X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad e \quad [v]_{B_{1n}} = Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T(u)\cdot v = (\underbrace{AX}_{T(u)})^T \cdot I \cdot Y = X^T A^T Y \qquad \forall X, Y \in \mathbb{R}^n$$

$$u \cdot T(v) = X^T \cdot I \cdot AY = X^T A Y$$

$$\to \text{poiche'} \ X^T A^T Y = X^T A Y \to \boxed{A^T = A}$$

cioe' la matrice $[T]_{B_{1n}}$ e' SIMMETRICA.

Proprieta':

① Se $\mathcal{U}$ e' un sottospazio invariante per T, anche $\mathcal{U}^\perp$ e' invariante per T.

Dim: devo dimostrare che, se $w \in \mathcal{U}^\perp$ allora $T(w) \in \mathcal{U}^\perp$ $\forall w \in \mathcal{U}^\perp$.

Sia $u \in \mathcal{U} \to T(u) \in \mathcal{U}$

Considero $\underset{0}{T(u)\cdot w} = \underset{0}{u \cdot T(w)}$ perche' T e' simmetrica

Dunque $T(w) \in \mathcal{U}^\perp$. c.v.d.

② Autovettori relativi ad autovalori diversi sono ortogonali.

Dim: siano v, u autovettori di T tali che $T(u) = \lambda u$ e $T(v) = \mu v$ con $\lambda \neq \mu$

Essendo T simmetrico $T(u)\cdot v = u \cdot T(v)$

$$\lambda u \cdot v \qquad u \cdot \mu v$$

$$\lambda(u \cdot v) \qquad \mu(u \cdot v)$$

$$\lambda(u\cdot v) - \mu(u \cdot v) = 0$$

$\Rightarrow (u \cdot v)(\lambda - \mu) = 0$

ma $\lambda - \mu \neq 0$ per ipotesi

dunque $u \cdot v = 0 \rightarrow u$ e' ortogonale a v.

c.v.d.

Teorema di struttura per gli operatori simmetrici:

Dato $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ simmetrico, esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, $B_{\perp n}$, rispetto alla quale $[T]_{B_{\perp n}} = D$ (matrice diagonale).

In conclusione, ogni matrice simmetrica e' diagonalizzabile.

<u>Dim</u>: per induzione sulla dimensione (n) dello spazio.

① Verifica per $n = 1$

$T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow T(x) = \lambda x$ (puo' essere fatto solo cosi l'operatore)

$[T]_e = (\lambda)$ e' diagonale

② Supponiamo dimostrato il teorema fino alla dimensione n e dimostriamolo per $n+1$.

Abbiamo già dimostrato che tutti gli autovalori di T simmetrico sono reali.

Sia λ uno di tali autovalori e v un suo autovettore, cioe' $T(v) = \lambda v$.

Considero il sottospazio $\langle\langle v \rangle\rangle$: e' un autospazio, invariante per T di dimensione 1.

Il suo complemento ortogonale $\langle\langle v \rangle\rangle^\perp$ e' un sottospazio di $\mathbb{R}^{n+1}$ di dimensione n, invariante per T.

Considero $T\big|_{\langle\langle v \rangle\rangle^\perp}$ tale che $\langle\langle v \rangle\rangle^\perp \longrightarrow \langle\langle v \rangle\rangle^\perp$ cioe' $T\big|_{\langle\langle v \rangle\rangle^\perp}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

ed e' ancora simmetrico.

Per l'ipotesi di induzione, esiste una base ortonormale di $\langle\langle v \rangle\rangle^\perp$, tale che la matrice $\left[T\big|_{\langle\langle v \rangle\rangle^\perp}\right]_{B'} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

considerando una base $B_{\langle\langle v \rangle\rangle} = \left\{ \frac{v}{\|v\|} \right\}$ l'insieme di vettori $B_{\langle\langle v \rangle\rangle} \cup B'$ e' base di $\mathbb{R}^{n+1}$ ortonormale poiche' i vettori sono ortogonali tra di loro e normalizzati.

$$\Rightarrow [T]_{B_{\langle\langle v \rangle\rangle} \cup B'} = \begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$ a meno di riordinare i vettori di base.

c.v.d.

<u>Proposizione</u>:

Una matrice $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ e' ortogonalmente diagonalizzabile se e soltanto se e' simmetrica.

<u>Dim</u>: Ricordo che A e' ortogonalmente diagonalizzabile se esiste S, ORTOGONALE, tale che $D = S^{-1}AS$.

$\boxed{\Leftarrow}$ ip: A matrice simmetrica reale

Gia' dimostrato: teorema di struttura degli operatori simmetrici.

(S e' la matrice del cambiamento di base e la base finale e' ortonormale).

$\boxed{\Rightarrow}$ suppongo per ipotesi che esista S ortogonale tale che $S^{-1}AS = D$

Voglio dimostrare che A e' simmetrica.

$D = S^{-1}AS$) moltiplico a sx per S e dx per S^{-1}

$SDS^{-1} = A$

Essendo $\underbrace{S \text{ ortogonale}}_{S^{-1} = S^T \Rightarrow}$, $A = SDS^T$

$A^T = (SDS^T)^T = (S^T)^T D^T S^T = SDS^T = A$

c.v.d.

caratteristiche geometriche

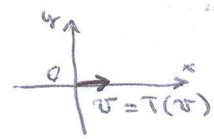
▷ $n = 1$ $\quad T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto \lambda x$ → OMOTETIA

- $\lambda = 1$ identita'
- $\lambda > 1$ allunga il vettore (DILATAZIONE)
- $\lambda < -1$ allunga il vettore e gli cambia il verso
- $-1 < \lambda < 1$ rimpicciolisce il vettore (e gli cambia il verso se λ e' negativo). (CONTRAZIONE)

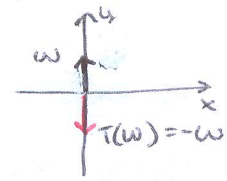
▷ $n=2$

esempio: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \rightarrow$ $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
$(x,y) \mapsto (x,-y)$

- se ho un vettore sull'asse x esso non cambia

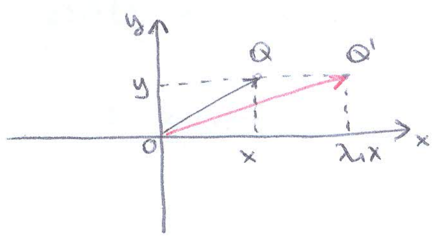


- se ho un vettore sull'asse y esso viene ribaltato



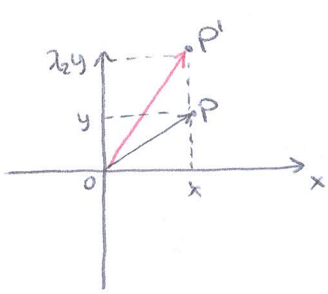
in generale:

① $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x \\ y \end{pmatrix}$ $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
$(x,y) \longmapsto (\lambda_1 x, y)$



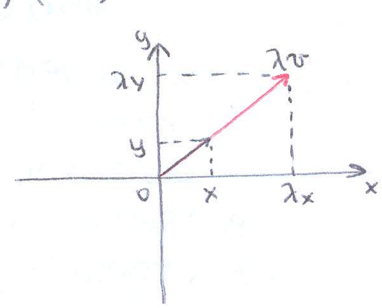
ci dà un'omotetia di rapporto λ_1 sull'asse x
I vettori sull'asse y rimangono inalterati.

② $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \lambda_2 y \end{pmatrix}$ $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
$(x,y) \longmapsto (x, \lambda_2 y)$



ci dà un'omotetia di rapporto λ_2 sull'asse y.
I vettori sull'asse x rimangono inalterati

③ $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ è un'omotetia nel piano.
DI RAPPORTO λ



④ $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x \\ \lambda_2 y \end{pmatrix}$ composizione di omotetie, una sull'asse x e una sull'asse y.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

▷ $n = 3$

$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I$ omotetia in $\mathbb{R}^3$

Studiare le omotetie lungo gli assi del sistema di riferimento e far vedere nuovamente che in generale abbiamo la composizione di tali omotetie.

~ · ~ · ~ · ~ · ~ · ~ · ~ · ~ · ~ · ~

LE CONICHE

$$\underbrace{2x^2 + 3xy - 4y^2}_{\text{grado}=2 \;\downarrow\; \text{forma quadratica}} + \underbrace{5x - 6y}_{\text{grado}=1 \;\downarrow\; \text{traslazione}} + 3 = 0$$

Bisogna trovare la forma canonica della forma quadratica: