Definizione: Dato V spazio vett. n-dimensionale, $W_1, W_2 < V \Longrightarrow$ definiamo SOMMA dei due sottospazi l'insieme $W_1 + W_2 = \{u + w \mid u \in W_1, w \in W_2\}$

- Si dimostra che $W_1 + W_2$ è un sottospazio di V (esercizio)
- È il più piccolo sottospazio che contiene $W_1 \cup W_2$

Se $W_1 \cap W_2 = \{0\} \Longrightarrow$ la loro somma è detta SOMMA DIRETTA e indicata così: $W_1 \oplus W_2$

Proposizione (teorema di GRASSMANN):

Nelle stesse ipotesi sopra riportate si ha $\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2)$

Dimostrazione: Siano $\dim W_1 = p$, $\dim W_2 = q$, $\dim W_1 \cap W_2 = k$ con $p, q, k \leq n$

Prendo la base $B_{W_1 \cap W_2} = \{u_1, u_2, \dots, u_k\} \Longrightarrow$ definisco una base $B_{W_1} = \{u_1, u_2, \dots, u_k, v_1, \dots, v_{p-k}\}$ (p è la dimensione dello spazio W_1) e $B_{W_2} = \{u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_{q-k}\}$. Sia $v \in W_1 + W_2 \Longrightarrow v = x_1 + x_2$ con $x_1 \in W_1$ e $x_2 \in W_2 \Longrightarrow$

$$v = a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_ku_k + b_1v_1 + \dots + b_{p-k}v_{p-k} + c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_ku_k + d_1w_1 + \dots + d_{q-k}w_{q-k}$$

$$= (a_1 + c_1)u_1 + \dots + (a_k + c_k)u_k + b_1v_1 + \dots + b_{p-k}v_{p-k} + d_1w_1 + \dots + d_{q-k}w_{q-k}$$

$W_1 + W_2 = \langle\langle u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_{p-k}, w_1, \dots, w_{q-k} \rangle\rangle$ è generato da $\cancel{k} + p - \cancel{k} + q - k$ vettori.

Dimostro la loro lineare indip.: sia $\alpha_1u_1 + \alpha_2u_2 + \dots + \alpha_ku_k + \beta_1v_1 + \dots + \beta_{p-k}v_{p-k} + \gamma_1w_1 + \dots + \gamma_{q-k}w_{q-k} = 0$

$$\underbrace{\alpha_1u_1 + \alpha_2u_2 + \dots + \alpha_ku_k + \beta_1v_1 + \dots + \beta_{p-k}v_{p-k}}_{\in W_1} = \underbrace{-\gamma_1w_1 - \dots - \gamma_{q-k}w_{q-k}}_{\in W_2} \Longrightarrow$$

$$\underbrace{-\gamma_1w_1 - \dots - \gamma_{q-k}w_{q-k}}_{\in W_1 \cap W_2} = \delta_1u_1 + \dots + \delta_ku_k \Longrightarrow \gamma_1w_1 + \gamma_2w_2 + \dots + \gamma_{q-k}w_{q-k} + \delta_1u_1 + \dots + \delta_ku_k = 0,$$

ma $u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_{q-k}$ sono lin. indip. $\Longrightarrow \gamma_1 = \dots = \gamma_{q-k} = \delta_1 = \dots = \delta_k = 0$, pertanto

$-\gamma_1w_1 - \dots - \gamma_{q-k}w_{q-k} = 0 \Longrightarrow \alpha_1u_1 + \alpha_2u_2 + \dots + \alpha_ku_k + \beta_1v_1 + \dots + \beta_{p-k}v_{p-k} = 0 \Longrightarrow$

POICHÉ $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_{p-k}$ FORMANO UNA BASE DI $W_1 \Longrightarrow$

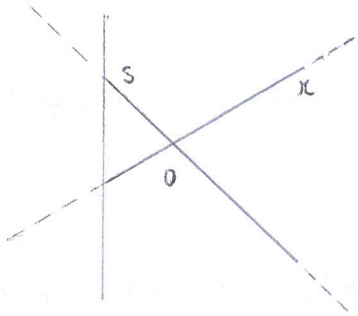
$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = \beta_1 = \dots = \beta_{p-k} = 0 \Longrightarrow u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_{p-k}, w_1, \dots, w_{q-k}$ sono lin. indip.

e quindi il teorema è dimostrato.

11/11/2015

es:

Se W_1 è la retta r e W_2 è la retta s sul piano



$$\dim W_1 \cap W_2 = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_1 + W_2$$

$$r + s = \mathbb{R}^2 \quad \Big| \quad 0 = 1 + 1 - 2$$

Siano π_1 e π_2 sottospazi vettoriali 2-dimensionali in $\mathbb{R}^3$ $\qquad \dim W_1 + W_2 \leq 3$

$$\dim W_1 + W_2 = \begin{cases} 3 \Longrightarrow \dim \pi_1 + \dim \pi_2 - \dim \pi_1 + \pi_2 = 2 + 2 - 3 = 1 \text{ (l'intersezione dei due piani è una retta)} \\ 2 \Longrightarrow 2 + 2 - 2 = 2 \text{ (i piani coincidono)} \end{cases}$$

Sia $B_W = \{w_1, \dots, w_k\}$ e $B_U = \{u_1, \dots, u_p\}$ con $W, U < V \Longrightarrow$ formo la matrice:

$$\begin{pmatrix} [w_1][w_2]\dots[w_k][u_1]\dots[u_p] \\ \\ \\ \end{pmatrix}_{n \times (k+p)}$$

riduco la matrice nella forma a gradini.

IL RANGO DELLA MATRICE È LA DIMENSIONE DI $W + U$ E I VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI FORMANO UNA BASE DI $W + U$.

Cerco i vettori di base dell'intersezione $W \cap U$. Considero la matrice A e la riduco a gradini in forma canonica

$$\mathcal{B} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \xrightarrow{k} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & \dots & e_k & x_1 & e_{k+1} & e_{k+2} & x_2 \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & b_2 \\ \vdots & 0 & & & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 & a_{k-1} & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 & a_k & 0 & 0 & b_k \\ \hline \vdots & \vdots & & 0 & 0 & 1 & 0 & b_{k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & 0 & 1 & b_{k+2} \\ & & & & & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & \vdots & \vdots \\ & & & & & & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$x_2 = b_1 e_1 + b_2 e_2 + \dots + b_k e_k + b_{k+1} e_{k+1} + b_{k+2} e_{k+2}$$

$$u_j = b_1 w_1 + b_2 w_2 + \dots + b_k w_k + b_{k+1} u_2 + b_{k+2} u_3$$

$$\Downarrow$$

$$\left. \underbrace{b_1 w_1 + \dots + b_k w_k}_{\in W} = \underbrace{u_j - b_{k+1} u_2 - b_{k+2} u_3}_{\in U} \right] \in W \cap U$$

QUINDI PER DETERMINARE I VETTORI DI BASE DI $W \cap U$ BASTA PRENDERE LE COMBINAZIONI LINEARI DEI VETTORI DI BASE DI W, PRIMO SOTTOSPAZIO DI $W \cap U$, CON COEFFICIENTI LE PRIME k ENTRATE DEI VETTORI LIN. DIPENDENTI NELLA MATRICE RIDOTTA IN FORMA CANONICA.

es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{5\times 5}$$

matrice già ridotta

Lo spazio somma avrà dimensione 3

della base canonica — base di U

Se considero $W \cap U$ una sua base è data da $2w_1 - w_2$, $3w_1 + 3w_2$ (generatori e basi dell'intersezione)

es:

In $\mathbb{R}^3$ considero un piano sottospazio vett. $\pi_1 : x+y-z=0$ e $\pi_2 : -x+2y=0$.
Basi di $\pi_1, \pi_2, \pi_1+\pi_2, \pi_1 \cap \pi_2$ e loro equazioni?

$x+y-z=0$ $\quad x=-y+z$ trovo le soluzioni fondamentali

sistema lineare omogeneo

x	y	z
-1	1	0
1	0	1
-s+t	s	t

$\Longrightarrow$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono linearmente indip. (hanno degli zeri) e sono detti soluzioni fondamentali del sistema

$$\begin{pmatrix} -s+t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ le <u>soluz. fondamentali formano sempre una base di Sol Σ_0</u>

se chiamo:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sistema vettoriale

passo al sistema scalare $\Longrightarrow$ $\begin{cases} x = -s+t \\ y = s \\ z = t \end{cases}$ eq. parametrica di π_1

Se cerco la base di π_2 $\quad -x+2y=0 \quad x=2y \Longrightarrow$

x	y	z
2	1	0
0	0	1

$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

oppure

$y = \frac{x}{2} \Longrightarrow$

y	x	z
1/2	1	0
0	0	1

! Attenzione a rimetterle "in fila"

$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

eq. parametrica $\begin{cases} x = 2s \\ y = s \\ z = t \end{cases}$

$\underline{\underline{\pi_1 \cap \pi_2}}$ $\quad \begin{cases} x+y-z=0 \\ -x+2y=0 \end{cases}$ eq. dell'intersezione

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \overset{3R_1-2R_3}{\sim} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \overset{R_1-3R_2}{\sim} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

La somma dei due sottospazi ci da tutto $\mathbb{R}^3$

La base può essere presa qualunque (es. quella canonica)

I due piani si intersecano in una retta di base :

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$