18/11/15

Un sottospazio affine di uno ... spazio vett. V è anche sottosp. vett di V?
Un " " vett. " " " " " affine di V?

Un sottospazio affine $\mathcal{A}$ di V è il traslato di $W \prec V$ rispetto ad un vettore a: cioè

$$\mathcal{A} = W + a = \left\{ w + a \mid w \in W \right\}$$

$\mathcal{A}$ è chiuso rispetto alla somma? siano $a_1, a_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow a_1 = w_1 + a$ e $a_2 = w_2 + a \Rightarrow$

$a_1 + a_2 = w_1 + a + w_2 + a \Rightarrow w_1 + w_2 + 2a = \underline{w_3 + 2a}$ (a non è contenuto in w)

Non è chiuso rispetto alla somma. QUINDI IN GENERALE, UN SOTTOSPAZIO AFFINE NON È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI V

$W \prec V \Rightarrow$ posso vedere W in questo modo $W = W + 0$ (traslato del vettore nullo)

Il sottospazio vettoriale quindi può anche essere visto come sottospazio affine.

I sottospazi affini DEL PIANO SONO:
- Tutti i punti del piano
- il piano stesso
- tutte le rette del piano (ottenendo traslando la retta passante per l'origine)

• in $\mathbb{R}^3$
- precedenti
- piani ottenuti traslando il piano passante per l'origine.

[ci stiamo limitando ad analizzare sottospazi affini dello spazio vettoriale]

Sia $x \in \mathcal{A}$ $\mathcal{A}$ sottospazio affine di $V \Rightarrow$ posto $\mathcal{A} = W + a \Rightarrow \exists\, w \in W$ tale che $x = w + a \Rightarrow$ fissata una base $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots, w_k\} \Rightarrow w = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_k w_k$

$$\Rightarrow x = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_k w_k + a \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} w_{11} \\ \vdots \\ w_{n1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} w_{12} \\ \vdots \\ w_{n2} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_k \begin{pmatrix} w_{1k} \\ \vdots \\ w_{nk} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \Rightarrow$$

EQUAZ. PARAMET. DELLO SOTTOSPAZIO AFFINE $\Rightarrow$

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 w_{1,1} + \alpha_2 w_{2,1} + \dots + \alpha_k w_{1k} + a_1 \\ \vdots \\ x_n = \alpha_1 w_{1,k} + \alpha_2 w_{2,k} + \dots + \alpha_k w_{nk} + a_n \end{cases}$$

: COME CASO PARTICOLARE NEL PIANO SI AVRÀ:

Rette del piano $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}$ è una base della direzione r_0

parametro

CIOÈ DEL SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI CUI È IL TRASLATO

l, m sono detti parametri direttori di r (definiti a meno di un multiplo) $\Rightarrow$ SI HA L'EQ. PARAMETRICA DELLA RETTA

$$\begin{cases} x = tl + x_0 \\ y = tm + y_0 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{x - x_0}{l} \quad l \neq 0$$

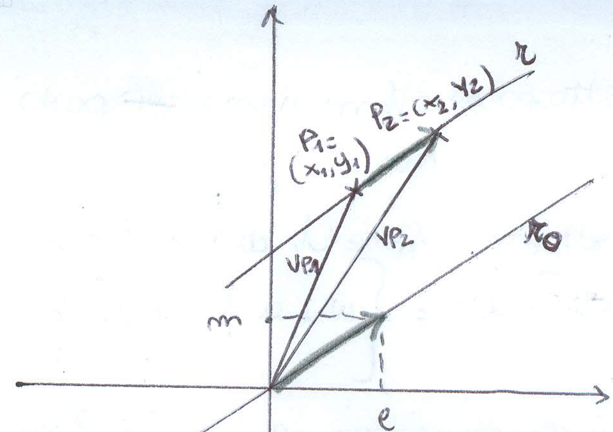
$$y = \frac{x - x_0}{l} m + y_0 \Rightarrow ly = mx - mx_0 + ly_0 \Rightarrow mx - ly \underbrace{- mx_0 + ly_0}_{} = 0 \Rightarrow$$

$ax + by + c = 0$

EQ. CARTESIANA

ricavo t e uguaglio i membri

$$\begin{cases} t = \dfrac{x - x_0}{l} \\ t = \dfrac{y - y_0}{m} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m}}$$



$$\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = V_{P_2} - V_{P_1} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

coordinate del vettore

se le sostituisco ad l, m ottengo:

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} \Rightarrow \boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}}$$

EQ. DI UNA RETTA PASSANTE PER DUE PUNTI

supposto

$\boxed{l, m \neq 0}$

$$\frac{(x - x_1)(y_2 - y_1) - (y - y_1)(x_2 - x_1)}{\cancel{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}} = 0$$

$\Downarrow$ si può vedere come un determinante

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & x_2 - x_1 \\ y - y_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

imporre det nullo é uguale a imporre

det nullo

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

considero det $\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x - x_1 & y - y_1 & 0 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \end{pmatrix} =$

$$-1 \cdot \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

DA CUI é quindi possibile RICAVARE l'eq della retta passante per due punti.

Sia $ax+by+c=0$ (eq. implicita) eq. di una retta in $\mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$ $y = \frac{-ax-c}{b}$ (eq. esplicita)

Diamo la soluzione particolare del sist. lin non omogeneo $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{c}{b} \end{pmatrix}$ $\quad y = -\frac{ax}{b}$ (omogeneo) $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{a}{b} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -\frac{a}{b}t - \frac{c}{b} \end{cases}$

soluzione fondamentale ci dà la base del sott. vett.

Abbiamo trovato l'eq parametrica partendo dall'eq. cartesiane, scegliendo dalle variabili libere il parametro e trovandone di conseguenza le altre.

Due rette sono parallele:

- EQ. PARAMETRICHE, se i parametri direttori di una sono multipli dei par. dir. dell'altra.

- EQ. CARTESIANA, se le due eq. differiscono del termine noto.

• FASCIO DI RETTE NEL PIANO

Def: definisco FASCIO di rette in $\mathbb{R}^2$ l'insieme delle rette ottenute come combinazione lineare di due rette date r_1, r_2.

Sia $r_1 = a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ed $r_2 = a_2x + b_2y + c_2 = 0$ $\Rightarrow$ l'eq. del fascio sarà:

(rette generatrici del piano)

$$\lambda(a_1x + b_1y + c_1) + \mu(a_2x + b_2y + c_2) = 0 \quad \lambda \mu \in \mathbb{R};$$

Considero $\Sigma: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$ cerco Sol Σ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Rouché-Capelli}}$ Considero $\underset{A}{rg\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}}$ e $\underset{(A|B)}{rg\left(\begin{array}{cc|c} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array}\right)}$ $\Rightarrow$

$$rg\, A = \begin{cases} 1 \\ 2 \Rightarrow rg(A|B) = 2 \end{cases}$$

2 righe lin. dip

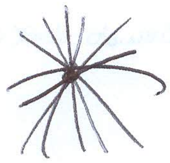
per Rouché-Capelli Sol $\Sigma \neq \emptyset$, le due rette si intersecano in un punto

Se $rg\, A = 2$ $\Rightarrow$ il fascio proprio e posso determinare un punto del piano che appartiene a tutte le rette ed è detto centro del fascio.

Se $rg\,A = 1 \Rightarrow rg\begin{pmatrix}A \,|\, B\end{pmatrix} =$ 1, le rette coincidono
2, le rette non si intersecano

Se $rg\,A = 1$ e $rg\,A|B = 2 \Rightarrow$ il fascio è detto <u>IMPROPRIO</u> ed è determinato da rette parallele

FASCIO PROPRIO



FASCIO IMPROPRIO

• <u>RETTE IN $\mathbb{R}^3$</u>

<u>Eq. parametrica</u>, deriva dall'eq vettoriale $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}l\\m\\n\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x = tl + x_0\\ y = tm + y_0\\ z = tn + z_0\end{cases}$

[I parametri non sono definiti univocamente, ma a meno di un multiplo,]
costante moltiplicativa

$l \neq 0 \Rightarrow t = \dfrac{x - x_0}{l}$

$$\begin{cases} y = \dfrac{x-x_0}{l}\,m + y_0 \\ z = \dfrac{x-x_0}{l}\,n + z_0 \end{cases}$$

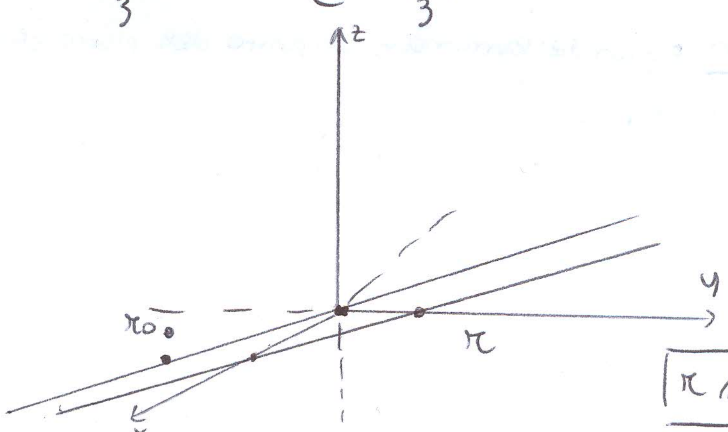
<u>Eq. cartesiana</u>

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ a_1t + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2t + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{-a_1t - c_1z - d_1}{b} \\ a_2t + b_2 \downarrow + c_2z + d_2 = 0 \end{cases} \dots = \begin{cases} x = t \\ y = \dots \\ z = \dots \end{cases}$$

<u>ESEMPIO:</u>

$$\begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ 2x + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = z + 1 - t \\ z = -\frac{2}{3}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -\frac{5}{3}t + 1 \\ z = -\frac{2}{3}t \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}1\\-5/3\\-2/3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}3\\-5\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

definiti a meno di una k moltiplicativa
↓
mi da la base del sottosp. vett.



$\boxed{r \,//\, r_0}$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \xrightarrow{\text{sistema di 2 eq}} \begin{cases} \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} \\ \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{z-z_1}{z_2-z_1} \end{cases}$$