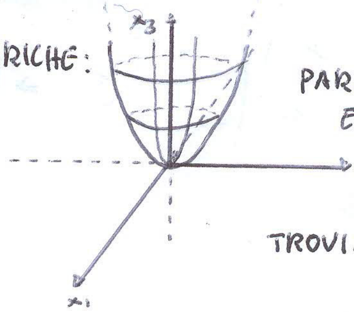
23/05/2016

$n=3$: DUE TIPI DIVERSI DI QUADRICHE:

$$+\frac{x_1^2}{\delta_1^2}+\frac{x_2^2}{\delta_2^2}=x_3$$



PARABOLOIDE ELLITTICO

altro caso: $\frac{x_1^2}{\delta_1^2}-\frac{x_2^2}{\delta_2^2}=x_3$

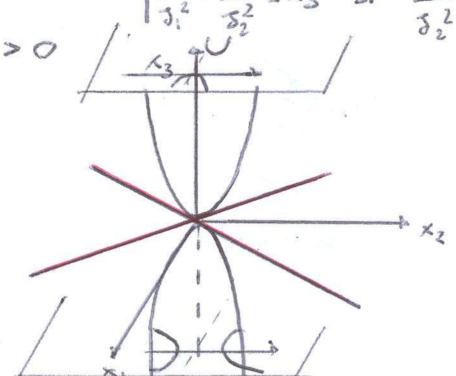
TROVIAMO SEZIONI PIANE PER DISEGNARE LE SUPERFICI.

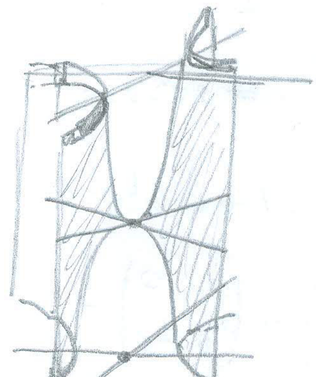
① $\begin{cases} x_1=0 \\ \frac{x_1^2}{\delta_1^2}+\frac{x_2^2}{\delta_2^2}=x_3 \end{cases} \rightarrow \frac{x_2^2}{\delta_2^2}=x_3$

$\begin{cases} x_1=K \\ \frac{K^2}{\delta_1^2}+\frac{x_2^2}{\delta_2^2}=x_3 \end{cases} \rightarrow \frac{x_2^2}{\delta_2^2}=\frac{\delta_1^2 x_3-K^2}{\delta_1^2} \rightarrow \delta_1^2 x_3 - K^2>0 \quad x_3>\frac{K^2}{\delta_1^2}$

$\begin{cases} x_3=K \\ \frac{x_1^2}{\delta_1^2}+\frac{x_2^2}{\delta_2^2}=x_3 \end{cases} \rightarrow \frac{x_1^2}{\delta_1^2}+\frac{x_2^2}{\delta_2^2}=K>0$

② $\begin{cases} \frac{x_1^2}{\delta_1^2}-\frac{x_2^2}{\delta_2^2}=x_3 \\ x_1=0 \end{cases} \rightarrow \frac{x_2^2}{\delta_2^2}=-x_3$

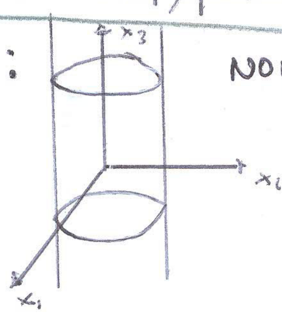




Paraboloide iperbolico o superficie a sella.

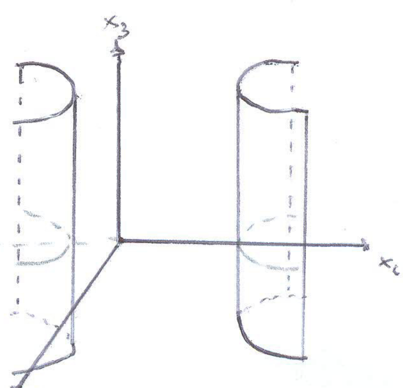
QUADRICHE DEGENERI: NON SONO PRESENTI TUTTE LE VARIABILI;

ES: $\frac{x_1^2}{\delta_1^2}+\frac{x_2^2}{\delta_2^2}=\alpha$, $\alpha>0$



CILINDRO ELLITTICO

$\frac{x_1^2}{\delta_2^2}-\frac{x_2^2}{\delta_2^2}=\alpha \longrightarrow$ CILINDRO IPERBOLICO



OPPURE $x_1^2-x_2^2=0$: LA QUADRICA SI SPEZZA NELL'UNIONE DI DUE PIANI $\neq$; $x_1^2=0$: PIANI COINCIDENTI E COSÌ VIA.

ESERCIZIO:

$x^2-2xy+y^2+4x-6y+2=0$

$\rightarrow x^2-2xy+y^2+4xx_0-6yx_0+2x_0^2=0$ (ora posso scrivere la matrice associata):

$$\det \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ x_0 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & x_0 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \end{array} = \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} = -(3-2) \neq 0$$

Parte quadratica:

$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \det(A-\lambda I)=0 \rightarrow \lambda_1=0,\ \lambda_2=2 \Rightarrow E_0=\langle\langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\rangle\rangle \quad x-y=0 \rightarrow v_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \rightarrow \tilde{v}_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$

$E_2: \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow x+y=0 \quad v_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \rightarrow \tilde{v}_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$

ESERCIZIO

Tracciare il grafico della conica avente equazione nelle coordinate x,y definite dalla base canonica:

$$Q: \quad x^2 - 4xy - 2y^2 - 3x - 3y + 5 = 0$$

Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ della parte quadratica: diagonalizziamola:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad -(1-\lambda)(2+\lambda) - 4 = 0$$

$$-2 - \lambda + 2\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda + 3) = 0$$

$\Rightarrow \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. È tale che $\quad D = S^{-1} A S$

Cerco S ortogonale, perché D deve essere anche congruente ad A:

Cerco gli autovettori: $E_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x + 2y = 0$

$\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \|v_1\| = \sqrt{5} \quad \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$

$E_{-3}: \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad -2x + y = 0 \quad \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \|v_2\| = \sqrt{5}$

$\Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$; ponendo $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$ le coordinate nella base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ si ha:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{cases} x = -2/\sqrt{5}\, \tilde{x} + 1/\sqrt{5}\, \tilde{y} \\ y = 1/\sqrt{5}\, \tilde{x} + 2/\sqrt{5}\, \tilde{y} \end{cases} \quad \Rightarrow$ l'equazione nelle coordinate

$\tilde{x}, \tilde{y}$ diventa: $\quad 2\tilde{x}^2 - 3\tilde{y}^2 - 3\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\tilde{x} + \frac{1}{\sqrt{5}}\tilde{y}\right) - 3\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\tilde{x} + \frac{2}{\sqrt{5}}\tilde{y}\right) + 5 = 0$

$\Rightarrow \; 2\sqrt{5}\,\tilde{x}^2 - 3\sqrt{5}\,\tilde{y}^2 - 9\tilde{y} + 3\tilde{x} + 5\sqrt{5} = 0$

Ora riduciamo ai quadrati:

$$2\sqrt{5}\left[\left(\tilde{x} + \frac{3}{4\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{9}{16.5}\right] - 3\sqrt{5}\left[\left(\tilde{y} + \frac{9}{6\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{81}{36.5}\right] + 5\sqrt{5} = 0$$

$$2\sqrt{5}\left(\tilde{x} + \frac{3}{4\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{9}{8\sqrt{5}} - 3\sqrt{5}\left[\left(\tilde{y} + \frac{9}{6\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{27}{4\cdot\sqrt{5}} + 5\sqrt{5} = 0\right.$$

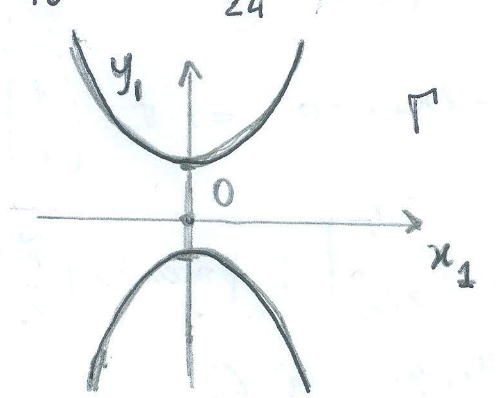
$$2\sqrt{5}\left(\tilde{x} + \frac{3}{4\sqrt{5}}\right)^2 - 3\sqrt{5}\left(\tilde{y} + \frac{3}{2\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{245}{8\sqrt{5}} = 0$$

Operiamo il cambiamento di coordinate:

$$\circledast \; \begin{cases} x_1 = \tilde{x} + \frac{3}{4\sqrt{5}} \\ y_1 = \tilde{y} + \frac{3}{2\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow \; -2\sqrt{5}\,x_1^2 + 3\sqrt{5}\,y_1^2 = +\frac{245}{8\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow -\frac{x_1^2}{\frac{245}{8\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{5}}} + \frac{y_1^2}{\frac{245}{8\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{3\sqrt{5}}} = 1$$

$$\Rightarrow -\frac{x_1^2}{\frac{49}{16}} + \frac{y_1^2}{\frac{49}{24}} = 1 \quad \Rightarrow \quad -\frac{x_1^2}{\left(\frac{7}{4}\right)^2} + \frac{y_1^2}{\left(\frac{7}{2\sqrt{6}}\right)^2} = 1 \quad \underline{\text{IPERBOLE}}$$



Questa è la conica Γ nel sistema di riferimento x_1, y_1

Il cambiamento di coordinate $\circledast$ definisce una traslazione

L'origine delle coordinate $\tilde{x}, \tilde{y}$ ha coordinate rispetto alla base nelle coordinate x_1, y_1: $\left(\frac{3}{4\sqrt{5}}, \frac{3}{2\sqrt{5}}\right)$