25/11/15

Studiamo i piani in R^3

l'eq. di un piano qualunque in R^3, che sono SOTTOSPAZI AFFINI DI R^3

EQ. PARAMETRICA DI UN PIANO π IN R^3 : $\pi = \pi_0 + a$

$\Rightarrow$ π_0 e' un sottospazio vettoriale 2 dimensionale quindi fissata una base $B_{\pi_0} = \{v_1, v_2\}$ si ha ogni vettore $v \in \pi_0$ si scrive come $v = \alpha v_1 + \beta v_2$ $\alpha, \beta \in R$

$\Rightarrow$ l'elemento generico $x \in \pi$ e' dato da $\cancel{x} = v + a$

$\Rightarrow$ in coordinate avremo $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ EQUAZIONE VETTORIALE DEL PIANO IN IR^3

$\Rightarrow$ si ha l'eq. parametrica

$$\begin{cases} x = \alpha l_1 + \beta l_2 + x_0 \\ y = \alpha m_1 + \beta m_2 + y_0 \\ z = \alpha n_1 + \beta n_2 + z_0 \end{cases}$$

le variabili sono α e β

SCALARI

[Il rango del nostro sistema sara' 2 ALMENO, perche' ci sono 2 vettori di base.]

~~[illegible]~~

Ricaviamo l'eq. cartesiana sostituendo i valori ricavati dei parametri α e β in una di tali equazioni. Oppure l'equazione cartesiana si ottiene sapendo che stiamo lavorando in R^3 e otteniamo in R^3 uno spazio affine 2-Dimensionale $\Rightarrow$ tale spazio e' spazio delle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo di 1 eq. in 3 variabili, che sara' del tipo:

$ax + by + cz + d = 0$

Per passare da eq. cartesiana a quella parametrica, si procede analogamente alle rette.

- Due piani π_1 e π_2 sono paralleli se hanno la stessa direzione $\Rightarrow$ se considero le equazioni parametriche dei due piani e quindi vettoriali dovremmo avere:

1 PIANO π_1 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ e π_2 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} l'_1 \\ m'_1 \\ n'_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} l'_2 \\ m'_2 \\ n'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$

SE I DUE PIANI SONO PARALLELI $\Rightarrow$ HANNO LA STESSA DIREZIONE $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ se io considero la matrice $\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l'_1 & l'_2 \\ m_1 & m_2 & m'_1 & m'_2 \\ n_1 & n_2 & n'_1 & n'_2 \end{pmatrix}$ DEVE AVERE rango 2 :

I VETTORI di base devono essere lin. ind. E QUELLI DI $(\pi_2)_0$ SONO COMB. LINEARI DI QUELLI DI $(\pi_1)_0$

Se sono date le eq. cartesiane $\Rightarrow a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

$\Rightarrow$ a meno di una costante moltiplicativa $a_1x + b_1y + c_1z = 0$ deve coincidere con $a_2x + b_2y + c_2z = 0$ cioe'

$$rg \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{mentre} \quad rg \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

quindi i 2 piani differiscono per i termini noti, SE NON SONO COINCIDENTI.

- Dati 3 punti non allineati $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ e $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$
  ⇒ un unico piano passa per tali punti, di equazione data dall'IMPORRE AL DETERMINANTE della matrice$_{4\times4}$:

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{pmatrix}$$

di ESSERE NULLO.

Lavorando sulla matrice con le operazioni elementari, il det resta quindi 0 E IL DETERMINANTE DARÀ l'eq. del piano

- FASCIO DI PIANI IN $\mathbb{R}^3$

E' l'insieme dei piani di $\mathbb{R}^3$ ottenuti come combinazione lineare di due piani π_1 e π_2 dati
⇒ se $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ sono le eq. di due piani, allora l'eq. del fascio sarà:

$$\lambda(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \mu(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$$

Per capire come è fatto questo fascio, considero l'intersezione dei 2 piani

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

Per determinare effettivamente la posizione dei piani nel fascio.

Studio quindi le matrici associate (COEFF. e COMPLETA)

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \quad e \quad A:B \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

A = lin. dip.

$$\Rightarrow rg\,A \begin{cases} 1 \Rightarrow rg(A:B) = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \\ 2 \Rightarrow rg(A:B) = 2 \end{cases}$$

→ se il rg $A = 1$ e rg $(A:B) = 1$ per Rouché Capelli il sistema ha soluzione e ho dim Sol $\Sigma = 2$ ⇒ SONO LO STESSO PIANO $\pi_1 \equiv \pi_2$

→ se il rg $A = 1$ e rg $(A:B) = 2$ il sistema non ha soluzione ⇒ I PIANI SONO //
al variare di λ e μ ottengo tutti i piani // a π_1 e quindi anche a π_2
⇒ FASCIO IMPROPRIO DI PIANI PARALLELI

→ se rg $A = 2$ e rg $(A:B) = 2$, i piani si intersecano in una retta $\pi_1 \cap \pi_2 = r$ la cui eq. cartesiana è quella data dal sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

~~Equazione generica~~, tutti i piani del fascio passano per tale retta r
POICHE' SE SOSTITUIAMO LE COORDINATE DI UN PUNTO DELLA RETTA NELL'EQUAZIONE DEL FASCIO QUESTA E' IDENTICAMENTE NULLA, ANNULLANDOSI LE EQUAZIONI DEI DUE PIANI π_1 E π_2.

POICHE' non posso considerare λ e $\mu = 0$ CONTEMPORANEAM.

Essendo difficile lavorare con due parametri, suppongo che uno sia $\neq 0$

$\Rightarrow \lambda \neq 0 \Rightarrow$ posso dividere per λ tutta l'equazione del fascio

$$\Rightarrow (a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \frac{\mu}{\lambda}(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$$

μ e λ sono dipendenti

$\rightarrow$ pongo $\frac{\mu}{\lambda} = t \Rightarrow$ posso sostituire e ottenere $(a_1x + \ldots + d_1) + t(a_2x + \ldots + d_2) = 0$

con questo passaggio PERO' perdo un piano: π_2 DOBBIAMO quindi nel risolvere gli esercizi con fasci di piani (o rette in $\mathbb{R}^2$) DOBBIAMO QUINDI NEL RISOLVERE GLI ESERCIZI CON FASCI DI PIANI (O RETTE IN $\mathbb{R}^2$) RICORDARCI ANCHE DI TALE PIANO E VERIFICARE LE RICHIESTE ANCHE PER ESSO

Una retta e un piano π: qual è la loro posizione reciproca?

$r: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$ e π $ax + by + cz + d = 0$

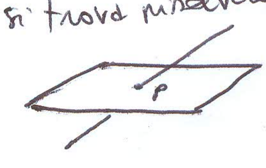
$\Rightarrow$ considero il sistema $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_1z + d_2 = 0 \\ ax + by + cz + d \end{cases}$ dobbiamo considerare i ranghi.

$\Rightarrow$ rg A e rg(A:B)

$$rg A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 \Rightarrow rg(A:B) = \begin{cases} 2 \rightarrow \text{abbiamo soluz. per R.C. ed è una retta } r \\ 3 \quad \text{NON C'E' SOLUZIONE} \end{cases} \\ 3 \Rightarrow rg(A:B) = 3 \rightarrow \text{il sistema ha soluzione per R.C ed è un punto} \end{cases}$$

$r \cap \pi = P$

si trova risolvendo il sistema



$\rightarrow$ se rg A = 2 e rg(A:B) = 2 $\rightarrow r \subset \pi$

$\rightarrow$ se rg A = 2 e rg(A:B) = 3 $\Rightarrow r // \pi$

$$r = x = t\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} + x_0$$

t e s sono parametri

$$\Pi: x = t\begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix} + x_1$$

$$r // \Pi \text{ se } \det\begin{pmatrix} l & l_1 & l_2 \\ m & m_1 & m_2 \\ n & n_1 & n_2 \end{pmatrix} = 0$$

Esercizio: Determinare i parametri h e k, reali, per i quali i piani

$\Pi_1: 2x + hy - 2z + 3 = 0$ e $\Pi_2: x + 2y + kz + 1 = 0$

si intersecano in una retta r // al sottospazio $\langle\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle\rangle$

$$r \quad x = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_0$$

$$\begin{cases} 2x + hy - 2z + 3 = 0 \\ x + 2y + kz + 1 = 0 \end{cases}$$ → determino la retta cercata, passante per l'origine

$$r_0 \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$ → EQ. PARAMETRICA DELLA DIREZIONE

⇒ la retta r_0 deve essere soluzione di $\begin{cases} 2x + hy - 2z + 3 = 0 \\ x + 2y + kz + 1 = 0 \end{cases}$ ⇒ $\begin{cases} 2t + ht - 2t = 0 \\ t + 2t + kt = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2 + h - 2 = 0 \\ 1 + 2 + k = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = 0 \\ k = -3 \end{cases}$$