sistema lineare non omogeneo: 28/09/2015

$$\Sigma: \begin{cases} x+y-z=2 \\ -x+2z=-3 \\ 2x+3y-z=3 \end{cases} \underset{\substack{Eq_1+Eq_2 \\ Eq_3-2Eq_1}}{\Longrightarrow} \begin{cases} x+y-z=2 \\ +y+z=-1 \\ +y+z=-1 \end{cases} \underset{Eq_2-Eq_3}{\Longrightarrow} \begin{cases} x+y-z=2 \\ y+z=-1 \\ 0=0 \end{cases} \Longrightarrow$$

definizione: Il numero di pivot presenti nel sistema ridotto a gradini è detto RANGO del sistema. Il rango ci dice quante variabili sono dipendenti o LEGATE nel sistema.

$$\underset{Eq_2-Eq_1}{\Longrightarrow} \begin{cases} -x \quad +2z=-3 \\ y+z=-1 \\ 0=0 \end{cases} \underset{-1Eq_1}{\Longrightarrow} \begin{cases} x \quad -2z=-3 \\ y+z=-1 \\ 0=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=2z+3 \\ y=-z-1 \end{cases}$$

- in questo caso particolare z è diventato parametro e dunque il sistema ha infinite soluzioni, TANTE quanti VALORI REALI può assumere z.

$$Sol\,\Sigma = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{cases} x=2z+3 \\ y=-z-1 \end{cases}\right\}$$

- 3 variabili nel sistema $\Rightarrow$ POSSIAMO PENSARE, CHE si lavora in uno spazio ambiente di 3 dimensioni: $\mathbb{R}^3$

NUMERO DELLE VARIABILI LIBERE (O PARAMETRI) = RANGO DEL SISTEMA RISOLUBILE = # VARIABILI − DIMENSIONE DELLO SPAZIO DELLE SOLUZIONI

$$Sol\,\Sigma = \{(2z+3, -z-1, z) \mid z\in\mathbb{R}\}$$

IN QUESTO CASO $Sol\,\Sigma$ È UNA RETTA NELLO SPAZIO TRIDIMENSIONALE

SE MANCA LA PRIMA VARIABILE NELLA PRIMA EQUAZIONE, POSSIAMO SCAMBIARE FRA LORO DUE EQUAZIONI E PROCEDERE CON IL METODO DI ELIMINAZIONE DI GAUSS

$$\begin{cases} y-z=1 \\ x+3y+z=0 \\ x-y \quad =0 \end{cases} \underset{Eq_2\to Eq_1}{\Longrightarrow} \begin{cases} x+3y+z=0 \\ y-z=0 \\ x-y \quad =0 \end{cases}$$

RIASSUMENDO:

- Per risolvere un sistema lineare con il metodo di eliminazione di Gauss usiamo tre "operazioni ELEMENTARI":

1. scambio di equazioni fra loro
2. moltiplicazione di un'equazione per uno scalare non nullo
3. sostituzione di un'equazione con la somma di tale equazione con un'altra del sistema

TALI OPERAZIONI SI POSSONO COMPORRE FRA LORO PER DETERMINARE TUTTE LE POSSIBILI OPERAZIONI

. Proposizione: con tali operazioni elementari si ottengono sistemi equivalenti, sistemi con lo stesso insieme di soluzioni.

Dimostrazione: per operazione 1.

dato il sistema Σ $\begin{cases} Eq_1 = 0 \\ Eq_2 = 0 \\ \vdots \\ Eq_p = 0 \end{cases}$ di p equazioni in n incognite, sia $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ una sua soluzione $\Rightarrow$ $\begin{cases} Eq_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0 \\ Eq_2(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0 \\ \vdots \\ Eq_p(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0 \end{cases}$: ottengo delle identità.

Scambio due equazioni e ottengo un nuovo sistema Σ_1 : $\begin{cases} Eq_2 = 0 \\ Eq_1 = 0 \\ \vdots \\ Eq_p = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ VOGLIO DIMOSTRARE CHE $Sol\,\Sigma = Sol\,\Sigma_1$.

$\Rightarrow$ $\begin{cases} Eq_2(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0 \\ Eq_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0 \\ \vdots \\ Eq_p(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0 \end{cases}$ sostituendo $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ in Σ_1 ottengo ancora delle identità

$$\Downarrow$$

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in Sol\,\Sigma_1$$

$$\Downarrow$$

$$Sol\,\Sigma \subseteq Sol\,\Sigma_1$$

Se voglio dimostrare che $Sol\,\Sigma_1 \subseteq Sol\,\Sigma$, prendo una n-upla $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in Sol\,\Sigma_1$ sostituisco tale n-upla in Σ e dimostro che allora ogni equazione di Σ è ridotta all'identità: vero perché le equazioni non sono cambiate $\Rightarrow Sol\,\Sigma = Sol\,\Sigma_1$

Dimostrazione: per operazione 2.

dato Σ :
$$\begin{cases} Eq_1 = 0 \\ Eq_2 = 0 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + b_i = 0 \quad (Eq_i) \\ Eq_{i+1} = 0 \\ \vdots \\ Eq_p = 0 \end{cases}$$

ottengo Σ_1 moltiplicando per $\gamma \in \mathbb{R} - \{0\}$ la i-esima equazione $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \Sigma_1 = \begin{cases} Eq_1 = 0 \\ Eq_2 = 0 \\ \vdots \\ \gamma a_{i1}x_1 + \gamma a_{i2}x_2 + \dots + \gamma a_{in}x_n = 0 \\ Eq_{i+1} \\ \vdots \\ Eq_p = 0 \end{cases}$$

Voglio dimostrare $Sol\,\Sigma = Sol\,\Sigma_1$, cioè che $Sol\,\Sigma \subseteq Sol\,\Sigma_1$.
Dato $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in Sol\,\Sigma \Rightarrow$ devo dimostrare che $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in Sol\,\Sigma_1$.
Poiché $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in Sol\,\Sigma \Rightarrow \begin{cases} Eq_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ \vdots \\ a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n + b_i = 0 \\ \vdots \\ Eq_p(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \end{cases} \Rightarrow$ le equazioni di tale sistema sono identità

Ora sostituisco $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ in $\Sigma_1 \Rightarrow$
$$\begin{cases} Eq_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0 \\ \vdots \\ \gamma(a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n + b_i) = 0 \\ \vdots \\ Eq_p(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Eq_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0 \\ \vdots \\ \gamma \cdot 0 = 0 \\ \vdots \\ Eq_p(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Eq_1(\ ) = 0 \\ \vdots \\ 0 = 0 \\ \vdots \\ Eq_p(\ ) = 0 \end{cases} \Rightarrow Sol\,\Sigma \subseteq Sol\,\Sigma_1$$

Anche $Sol\,\Sigma_1 \subseteq Sol\,\Sigma$ poiché si passa da Σ_1 a Σ moltiplicando la i-esima equazione di Σ_1 per γ^{-1} e quindi si dimostra come prima che $Sol\,\Sigma_1 \subseteq Sol\,\Sigma$

Matrici :

$$\Sigma \begin{cases} x - \sqrt{2}y + z = 1 \\ 2x + y = 2 \\ 3x - y + z/2 = 3 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

Voglio associare al sistema una matrice, cioè una tabella di scalari ordinata per righe e colonne, tali scalari sono detti entrate della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1/2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}_{4\times 3}$$

matrice dei coefficienti di Σ (o incompleta di Σ)

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1/2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)_{4\times 4}$$

matrice completa (cioè con l'aggiunta dei termini noti)

PER RISOLVERE IL SISTEMA CON IL METODO DI ELIMINAZIONE DI GAUSS POSSIAMO ASSOCIARE AL SISTEMA LA MATRICE COMPLETA E CAMBIARE LE RIGHE DELLA MATRICE MEDIANTE LE OPERAZIONI ELEMENTARI