29/02/2016

Esercizio: considero l'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \longmapsto (x+ky+z, 2x-y+5z, -x+y+kz)$, si dimostra che è effettivamente lineare, in quanto $f(\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2) = \alpha_1 f(v_1)+\alpha_2 f(v_2)$ $\forall\, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

INFATTI: SE PONIAMO

$v_1=(x_1,y_1,z_1)$ e $v_2=(x_2,y_2,z_2) \Rightarrow \alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2 = (\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2, \alpha_1 z_1+\alpha_2 z_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2) = (\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+k(\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2)+\alpha_1 z_1+\alpha_2 z_2, 2(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)-(\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2)+5(\alpha_1 z_1+\alpha_2 z_2), -(\alpha_1 x_1+\alpha_2 v_2)+(\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2)+k(\alpha_1 z_1+\alpha_2 z_2))$

INOLTRE:

$\alpha_1 f(v_1)+\alpha_2 f(v_2) = \alpha_1(x_1+ky_1+z_1, 2x_1-y_1+5z_1, -x_1+y_1+kz_1)+\alpha_2(x_2+ky_2+z_2, 2x_2-y_2+5z_2, -x_2+y_2+kz_2) \Rightarrow$ proseguendo nei conti si osserva che la relazione $f(\alpha_1+\alpha_2 v_2)=\alpha_1 f(v_1)+\alpha_2 f(v_2)$ e perciò l'applicazione è lineare. Diversamente si può osservare che le immagini dell'applicazione sono espresse mediante polinomi lineari omogenei. Cerco ora una base e la dimensione di Ker f: prima di tutto associamo all'applicazione una matrice con basi fissate canoniche. A questo punto, occorre

$$[f]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

studiare il rango di $[f]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}$ al variare di k, perché esso ci dà ~~la~~ dimensione dell'immagine Im f, che a sua volta è legata a Ker f dal Teorema delle dimensioni. Dunque calcolo il determinante e vedo quando si annulla al variare di k.

$$\begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & k \end{vmatrix} = -2k^2-6k-4=0 \Rightarrow k^2+3k+2=0 \Rightarrow k=-2,\ k=-1$$

tali valori annullano il determinante di $[f]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}$.

quindi $\forall\, k \in \mathbb{R}-\{-1,-2\}$ $rk[f]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}=3 \Rightarrow \mathrm{Im} f = \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ f è suriettiva, perché immagine e codominio coincidono $\Rightarrow \dim \mathrm{Ker} f = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ è iniettiva $\Rightarrow f$ è un isomorfismo. Quando f è iniettiva, il nucleo è costituito dal solo vettore nullo, e perciò non ne cerco una base. Considero ora gli altri valori k.

minore diverso da zero

Per $k=-1$

$$rk\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \dim \mathrm{Im} f = 2 \text{ e } \mathcal{B}_{\mathrm{Im} f} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

cerco ora le equazioni di Im f, per $k=-1$, che sarà un piano, scrivendo prima quella vettoriale, passando poi a quella parametrica, e da quella alla cartesiana

$$\mathrm{Im} f: \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = t-s \\ y' = 2t-s \\ z' = -t+s \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = x'+s \\ z' = -x'-\cancel{s}+\cancel{s} \end{cases} \Rightarrow \mathrm{Im} f: \boxed{x'+z'=0}$$

Vediamo ora il nucleo (retta in $\mathbb{R}^3$)

$$\mathrm{Ker} f: \begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x-y+5z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x+z \\ 2x-x-z+5z=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=-3z \\ x=-4z \end{cases} \Rightarrow \text{se } z=1 \Rightarrow \mathcal{B}_{\mathrm{Ker} f} = \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

se voglio la parametrica, pongo $z=t$ e ottengo $\begin{cases} x=-4t \\ y=-3t \\ z=t \end{cases}$

La nostra applicazione ha autospazi? Prima di tutto, cerco gli autovalori e gli autovettori per f, scrivendo la matrice $([f]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} - \lambda I)$ e calcolandone il determinante

$$\begin{vmatrix} (1-\lambda) & -1 & 1 \\ 2 & (-1-\lambda) & 5 \\ -1 & 1 & (-1-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)[(-1-\lambda)^2-5]+(-2-2\lambda+5)+2-1-\lambda = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)(\lambda^2+2\lambda+1-5)-3\lambda+4=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\lambda^3-2\lambda^2+4\lambda+\lambda^2+2\lambda-4-3\lambda+4=0 \Rightarrow -\lambda^3-\lambda^2+3\lambda=0 \Rightarrow -\lambda(\lambda^2+\lambda-3)=0$$

dunque $\lambda=0$, $\lambda=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$ sono autovalori

per $\lambda=0$, l'autospazio relativo altro non è che il nucleo di f, cioè $E_0=\ker f=$
$= \begin{cases} y=-3z \\ x=-4z \end{cases}$, vediamo ora per un altro autovalore

$$E_{\frac{-1-\sqrt{13}}{2}} = \begin{pmatrix} 1-\frac{-1-\sqrt{13}}{2} & -1 & 1 \\ 2 & -1-\frac{-1-\sqrt{13}}{2} & 5 \\ -1 & 1 & -1-\frac{-1-\sqrt{13}}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3+\sqrt{13}}{2}x - y + z = 0 \\ -x + y + \frac{-1+\sqrt{3}}{2} z = 0 \end{cases}$$

$E_{\frac{-1+\sqrt{13}}{2}}$ (si svolge in modo analogo)

Consideriamo nuovamente il polinomio caratteristico, ricavato in precedenza: noto che ogni autovalore ha molteplicità algebrica 1.

$$\lambda\left(\lambda-\frac{\sqrt{13}-1}{2}\right)\left(\lambda+\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)=0 \qquad \mu(0)=\mu\left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right)=\mu\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)=1$$

se desidero invece la molteplicità geometrica, devo cercare la dimensione degli autospazi relativi agli autovalori. Si nota subito che $0 < m(\lambda) \le 3$

<u>Proposizione</u>: La dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore λ è sempre $\le$ alla molteplicità algebrica dell'autovalore λ.

<u>Dimostrazione</u>: supponiamo che $\dim E_{\lambda_0}$ sia k in uno spazio vettoriale V di dimensione n
Sia $B_{E\lambda_0}=\{u_1,\dots,u_k\}$ base di $E\lambda_0$, costituita da autovettori relativi a λ_0 $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ Estendo tale base ad una base di V, $B_V=\{u_1,\dots,u_k,v_1,\dots,v_{n-k}\}$
detta $T: V \to V$ l'applicazione lineare di cui ho dato autovalore e autospazio, scrivo

$$[T]^{B_V}_{B_V} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & \lambda_0 & & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 & & & \\ \vdots & & & 0 & a_{k+1,k+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow T(u_j)=\lambda_0 u_j \;\; \forall j=1,\dots,k \Rightarrow \left|[T]^{B_V}_{B_V}-\lambda I\right| =$$

POICHÉ:

$$= \left|\begin{array}{cccc|ccc} \lambda_0-\lambda & 0 & \cdots & 0 & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & \lambda_0-\lambda & \cdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & & \lambda_0-\lambda & a_{k,k+1} & \cdots & a_{k,n} \\ \hline & 0 & & & a_{k+1,k+1}-\lambda & \cdots & a_{k+1,n} \\ & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & a_{n,k+1} & \cdots & a_{n,n}-\lambda \end{array}\right| = (\lambda_0-\lambda)^k p(\lambda) = 0$$

λ_0 è radice del polinomio caratteristico, almeno di grado k, ma non sappiamo se esso è presente in $p(\lambda)$, dunque può essere maggiore $\Rightarrow \mu(\lambda_0) \ge k$

Q.E.D.

~~Dimostrazione dal Fabbri che rispetta~~

<u>Definizione</u>: si dice <u>spettro</u> di un operatore T, l'insieme dei suoi autovalori riportati tante volte quanto è la loro molteplicità algebrica.

<u>Esempio</u>: $Sp\, f = \left\{ 1, \frac{\sqrt{13}-1}{2}, \frac{-\sqrt{13}-1}{2} \right\}$

Se T ha autovalori 1, 2, 3, con $\mu(1)=4$, $\mu(2)=1$, $\mu(3)=2 \Rightarrow Sp\,T = \{1,1,1,1,2,3,3\}$

Per la prossima volta, un sottospazio invariante è sempre un autospazio? No, perché? Si fornisca un contro-esempio.