05/04/17

Teorema: Data $Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ forma quadratica reale $\Rightarrow$ **1)** $\exists\ B_\perp$ base ortogonale di $\mathbb{R}^n$ tale che $[Q]_{B_\perp} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ (p: numero di 1, q: numero di −1, n: numero di 0)

2) Il numero di entrate positive e il numero di entrate negative in matrici diagonali associate a Q in basi diverse sono invariati.

Dimostrazione: **1)** Sappiamo che $\exists$ sempre una base B di $\mathbb{R}^n$ tale che $[Q]_B$ è diagonale $\Rightarrow$ poniamo $[Q]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \alpha_p & & & \\ & & & \beta_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \beta_q \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$ con $q = n-p$, con n = rango di Q, e

Supponiamo, a meno di cambiare l'ordine dei vettori nella base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$, che $\alpha_i > 0\ \forall i = 1, \dots, p$, $\beta_j < 0\ \forall j = 1, \dots, q \Rightarrow \exists\ a_i \in \mathbb{R} \mid a_i^2 = \alpha_i\ \forall i = 1, \dots, p$ e $b_j \in \mathbb{R} \mid b_j^2 = -\beta_j\ \forall j = 1, \dots, q \Rightarrow$ Prendo la base:

$$B_\perp = \left\{ \frac{v_1}{a_1}, \frac{v_2}{a_2}, \dots, \frac{v_p}{a_p}, \frac{v_{p+1}}{b_1}, \frac{v_{p+2}}{b_2}, \dots, \frac{v_n}{b_q}, v_{n+1}, \dots, v_n \right\}$$

Tale base è quella cercata infatti: • è ortogonale poiché B lo era quindi

$$F_Q\left(\left(\frac{v_i}{a_i}, \frac{v_j}{b_j}\right)\right) = \frac{1}{a_i} \cdot \frac{1}{b_j} F((v_i, v_j)) = 0 \quad \forall i, j$$

• se costruiamo la matrice associata a F_Q, $[F_Q]_{B_\perp} = [Q]_{B_\perp}$, otteniamo $\begin{pmatrix} c_{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & c_{ii} & \\ & & & \ddots \\ & & & & c_{nn} \end{pmatrix}$ con $c_{11} = F_Q\left(\left(\frac{v_1}{a_1}, \frac{v_1}{a_1}\right)\right) = \frac{1}{a_1^2} F_Q((v_1, v_1)) = \frac{1}{a_1^2}\alpha_1 = \frac{1}{\alpha_1}\alpha_1 = 1$;

analogamente per c_{ii} con $i = 1, \dots, p$.

$$c_{p+1,p+1} = F_Q\left(\left(\frac{v_{p+1}}{b_1}, \frac{v_{p+1}}{b_1}\right)\right) = \frac{1}{b_1^2} F_Q((v_{p+1}, v_{p+1})) = \frac{1}{b_1^2}\beta_1 = \frac{1}{(-\beta_1)}\beta_1 = -1$$

e analogamente $c_{jj} = -1\ \forall j = p+1, \dots, n$, $c_{kk} = 0\ \forall k = n+1, \dots, n$ poiché $F_Q((v_k, v_k)) = 0$

$\Rightarrow [Q]_{B_\perp} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$

2) Supponiamo che non siano invariati $\Rightarrow$ posta $B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ tale che $F_Q((v_i, v_i)) > 0\ \forall i = 1, \dots, p$; $F_Q((v_j, v_j)) < 0\ \forall j = p+1, \dots, n$; $F_Q((v_k, v_k)) = 0\ \forall k = n+1, \dots, n$.

Prendiamo $B_2 = \{w_1, \dots, w_n\}$ tale che $F_Q((w_l, w_l)) > 0\ \forall l = 1, \dots, t$; $F_Q((w_m, w_m)) < 0$ $\forall m = t+1, \dots, n$; $F_Q((w_h, w_h)) = 0\ \forall h = n+1, \dots, n$, con n = rango F_Q.

Dimostriamo che $p = t$. Per assurdo, supponiamo $t < p \Rightarrow$ chiamiamo $V = \langle\langle v_1, \dots, v_p \rangle\rangle \subset \mathbb{R}^n$ e $W = \langle\langle w_{t+1}, \dots, w_n \rangle\rangle \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow$ per il teorema di Grassmann $\dim(V+W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W) \Rightarrow \dim(V+W) = p + (n-t) - \dim(V \cap W)$. Cerco $V \cap W$: se $V \cap W \neq \{0\}$

$\Rightarrow \exists\ u \in V \cap W$, $u \neq 0 \Rightarrow$ poiché $u \in V \Rightarrow u = \sum_{i=1}^{p} x_i v_i \Rightarrow F_Q((u,u)) = Q(u) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 F_Q((v_i, v_i)) > 0$.

Ma $u \in W \Rightarrow u = \sum_{j=t+1}^{n} y_j w_j \Rightarrow Q(u) = F_Q((u,u)) = F_Q\left(\left(\sum_{j=t+1}^{n} y_j w_j, \sum_{j=t+1}^{n} y_j w_j\right)\right) = \sum_{j=t+1}^{n} y_j^2 F_Q((w_j, w_j)) < 0$.

$\Rightarrow V \cap W = \{0\}$ poiché non è possibile le immagini di u siano sia positive che negative $\Rightarrow \nexists\ u \neq 0$

$\Rightarrow \dim(V+W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W) = p + n - t + 0 = p + n - t > n$, assurdo! $\Rightarrow$ la dim. del sottosp. non può essere maggiore di quella dello spazio.

Quindi non è vero che $p > t$! $\Rightarrow$ Supponiamo $p < t$.

Con un ragionamento analogo si giunge di nuovo ad un assurdo.

$\Rightarrow p = t \Rightarrow$ il numero di entrate positive sulla diagonale di matrici congruenti è invariante: invariante positivo di inerzia.

Se ora analizziamo il numero di elementi negativi:
⇒ # elementi negativi = rg Q − # elementi positivi ⇒ è un invariante, detto invariante negativo d'inerzia. CVD
Se conosco la segnatura o segno di una forma quadratica reale, cioè (p, q)
⇒ il teorema di Silvester mi dice che ∃ una base $B_\perp$ di $\mathbb{R}^n$ tale che

$$[Q]_{B_\perp} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \} p \\ \\ \\ \} q \\ \\ \\ \} n \\ \\ \\ \end{matrix}$$

⇒ prendo in $\mathbb{R}^n$ tale base e ho dunque $Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $X \mapsto Q(X)$
con $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = [v]_{B_\perp}$ e $Q(X) = X^T [Q]_{B_\perp} X = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_n^2$ (q)
↗ FORMA CANONICA DI Q(X)

• Se $Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è forma quadratica definita positiva ha rango massimo ⇒ $r = n$ e la sua segnatura sarà $(n, 0)$ ⇒ ∃ $B_\perp$ di $\mathbb{R}^n$ | $[Q]_{B_\perp} = I$ e $Q(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.
Se $Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è definita negativa ⇒ segnatura $Q = (0, n)$ e ∃ $B_\perp$ di $\mathbb{R}^n$ | $[Q]_{B_\perp} = -I$ e l'espressione analitica di Q è $Q(X) = \sum_{i=1}^{n} -x_i^2$.

Proposizione (di Jacobi): Sia $Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ forma quadratica e B base di $\mathbb{R}^n$ tale che $A = [Q]_B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Supponiamo che tutti i minori principali di nord-ovest di A, d_k, cioè quelli formati con le prime k righe e k colonne di A, $\forall k = 1, \dots, n$ siano tutti $\neq 0$. ⇒ ∃ B_1 ortogonale di $\mathbb{R}^n$ tale che

$$[Q]_{B_1} = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & \frac{d_2}{d_1} & & 0 \\ & & \frac{d_3}{d_2} & \\ & 0 & & \ddots \\ & & & & \frac{d_n}{d_{n-1}} \end{pmatrix}$$

Esempio dei d_k: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ⇒ $d_1 = |1|$, $d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$, $d_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = -2$.
(Questa matrice non è simmetrica dunque non è associabile ad una forma quadratica).
Considero una matrice associabile ad una forma quadratica:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow d_1 = |1| = 1,\ d_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1,\ d_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\Rightarrow [Q]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Corollari (criteri di positività e negatività per le forme quadratiche, conseguenza di Jacobi)
1) $Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ forma quadratica è definita positiva ⇔ tutti i minori principali di nord-ovest di una matrice associata a Q in una base qualunque di $\mathbb{R}^n$ sono positivi.
2) $Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ forma quadratica è definita negativa ⇔ i minori di nord-ovest di una qualunque matrice associata a Q sono positivi se l'ordine è pari e negativi se è dispari. | Criteri (applicabili sia nel caso della proposizione di Jacobi che in altri casi):
1) Q è semidefinita positiva ⇔ tutti i minori principali sono non negativi.
2) Q è semidefinita negativa ⇔ tutti i minori principali di ordine k, moltiplicati per $(-1)^k$, sono non negativi.