5/10/16

$A, B \in M_{K \times m}(\mathbb{R}) \Rightarrow$ posto $A = (a_{ij})_{\substack{i=1\dots K \\ j=1\dots m}}$ e $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots K \\ j=1,\dots m}}$

(VOGLIO DEFINIRE ~~Dimostrare~~ l'opposto nella somma tra matrici)

$$\Rightarrow A \hat{+} B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=1\dots K \\ j=1\dots m}}$$

$\exists$ opposto? cioè data $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,K \\ j=1,\dots,m}}$ $\exists$ una matrice $X = (x_{ij})_{\substack{i=1,\dots,K \\ j=1,\dots,m}}$

tale che $A \hat{+} X = 0$ con $0 = (0)$ $\forall$ entrata della matrice?

entrate nulle

Dimostrazione:

$(a_{ij}) \hat{+} (x_{ij}) = (0)$

$\|$

$$(a_{ij} + x_{ij}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \left.\begin{array}{l} a_{11} + x_{11} = 0 \\ a_{12} + x_{12} = 0 \\ a_{13} + x_{13} = 0 \\ \vdots \\ a_{1m} + x_{1m} = 0 \end{array}\right\} \text{ENTRATE DELLA } 1^a \text{ riga} \\ \vdots \\ \left. a_{21} + x_{21} = 0 \right\} \text{ENTRATE } 2^a \text{ riga} \\ \vdots \\ a_{Km} + x_{Km} = 0 \end{cases}$$

~~devono~~ ~~porre~~

sistema da risolvere (SISTEMA SCALARE)

NB. due matrici sono uguali quando hanno le stesse entrate NEGLI STESSI POSTI.

QUINDI $(a_{ij} + x_{ij}) = (0)$

$\Longleftrightarrow \quad a_{ij} + x_{ij} = 0 \ \forall i, j$

ABBIAMO QUINDI IL SISTEMA A SINISTRA, OTTENUTO UGUAGLIANDO LE ENTRATE CORRISPONDENTI.

perché indica essere opposto

X si indica con $-A$

$\Uparrow$

$$\begin{cases} x_{Km} = -a_{Km} \\ \vdots \\ x_{21} = -a_{21} \\ x_{1m} = -a_{1m} \\ \vdots \end{cases} \quad \text{(sistema lineare non omogeneo)} \quad \begin{cases} \vdots \\ x_{11} = -a_{11} \\ x_{12} = -a_{12} \\ x_{13} = -a_{13} \\ \vdots \end{cases} \Rightarrow X = (-a_{ij})$$

Definiamo la "moltiplicazione" tra matrici

moltiplicazione riga per colonna → SI PUÒ FARE SOLO SE: n° COLONNE 1ª matrice = n° RIGHE 2ª matrice

Sia $A=(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,k\\ j=1,\dots,m}}$ e $B=(b_{hk})_{\substack{h=1,\dots,m\\ k=1,\dots,l}}$

1ª riga matrice sinistra

1ª colonna matrice destra

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{km} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1l} \\ b_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ b_{m1} & \cdots & b_{m2} & b_{ml} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots \\ \vdots & & \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = a_{11}\cdot b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + a_{14}b_{41} + \dots + a_{1m}\cdot b_{m1}$$

$$\Rightarrow A * B = C = (c_{ik}) = \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk}\right)$$

$\cancel{C \in M_{k\times l}}$

SE

$$A=(a_{ij}) \in M_{k\times m} \quad e \quad B=(b_{jk}) \in M_{m\times l} \Rightarrow C \in M_{k\times l}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{4\times 3} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 2} \qquad \Rightarrow A * B = C \in M_{4\times 2}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + (-2)1 + 3\cdot 2 & 1\cdot(-2) + (-2)3 + 3\cdot 0 \\ -1\cdot 2 + 0\cdot 1 + (-1)2 & -1\cdot(-2) + (0\cdot 3) + (-1\cdot 0) \\ 2\cdot 2 + 1\cdot 1 + 3\cdot 2 & 2\cdot(-2) + (1\cdot 3) + (3\cdot 0) \\ (-3\cdot 2) + (1\cdot 1) + (2\cdot 2) & (-3\cdot -2) + 1\cdot 3 + (2\cdot 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -4 & 2 \\ 11 & -1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$$

Tale operazione è definita in $M(\mathbb{R})$

È associativa? cioè $(A*B)*C = A*(B*C)$ $\forall A,B,C$ possibili?

$(A_{k\times m} * B_{m\times l}) * C_{l\times m}$ $\qquad$ $A_{k\times m} * (B_{m\times l} * C_{l\times m})$

$\qquad \| \qquad\qquad\qquad\qquad \|$

$F_{k\times m} = E_{k\times l} * C_{l\times m}$ $\qquad$ $A_{k\times m} * G_{m\times m} = H_{k\times m}$

DOBBIAMO DIMOSTRARE CHE $F_{k\times m} = H_{k\times m}$, CIOÈ CHE HANNO UGUALI TUTTE LE ENTRATE CORRISPONDENTI

FACCIAMO VEDERE CHE $f_{11} = h_{11}$.

$$f_{11} = \sum_{j=1} e_{1j} c_{j1} = e_{11}c_{11} + e_{12}c_{21} + e_{13}c_{31} + \dots + e_{1l}c_{l1}$$

$$(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + \dots + a_{1m}b_{m1}) \cdot c_{11} + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \dots + a_{1n}b_{n2})c_{21} + (\dots)c_{31} + \dots (a_{11}b_{1l} + \dots + a_{1n}b_{nl})c_{l1}$$

$\|?$

$$h_{11} = a_{11}g_{11} + a_{12}g_{21} + a_{13}g_{31} + \dots + a_{1m}g_{m1}$$

$$a_{11}(b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21} + b_{13}c_{31} + \dots + b_{1l}c_{l1}) + a_{12}(b_{21}c_{11} + \dots + b_{2l}c_{l1}) + \dots$$

FACENDO I CONTI SI DIMOSTRA $f_{11} = h_{11}$. LO STESSO PER $f_{ij} = h_{ij}$ $\forall i,j$.

Vale quindi la proprietà associativa!

In $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ $\forall A,B \in M_{n\times m}$ si può fare $A*B$ e si ottiene $C \in M_{n\times m}$

IN TALE INSIEME L'OPERAZIONE È BINARIA, INTERNA

$\exists$ elemento neutro? cioè $\exists X \in M_{n\times m}$ tale che

$$\forall A \in M_{n\times m} \quad A*X = X*A = A?$$

(deve essere matrice di identità!)

solo diagonale 1, gli altri zero

Da dimostrare

Non può essere commutativa (~~[illegible]~~)

IN GENERALE:

$A_{k\times m} * B_{m\times l} = C_{kl}$

MENTRE

$B_{m\times l} * A_{k\times m}$ NON PUÒ ESSERE FATTO.

ANCHE NELL'INSIEME DELLE MATRICI QUADRATE * NON È COMMUTATIVA: INFATTI

Controesempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 13 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$$

QUINDI:

$$A * B \neq B * A$$

Ad un sistema lineare si possono associare due matrici: la prima è la matrice A dei coefficienti del sistema o matrice incompleta e la matrice B ottenuta aggiungendo ad A una colonna formata dai termini noti: B è detta matrice completa

ex. $\begin{cases} x_1 - x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}_{2\times 3}$

1 0 -1

1 1 -1

→ tante righe quante sono le equazioni

→ tante colonne quanto le variabili

e $B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$

coefficienti

termini noti

$\underbrace{R_1 - R_2}_{\text{riga}} \rightarrow \underbrace{R_2}_{\text{il risultato al posto della 2a}}$

FORMA A GRADINI CANONICA

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 7 \end{array}\right)$$

pivot

↓

i primi elementi non nulli della matrice (riduzione a gradini)

equivalente

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 8 \\ -x_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = 8 \\ +x_2 = -7 \end{cases} \quad \infty^1$$

→ sopra e sotto i pivot deve esserci zero