SOTTOSPAZI AFFINI $\mathbb{R}^3$

- RETTE

Sia r una retta di $\mathbb{R}^3$ sarà descritta da un sistema lineare non omogeneo 2 equazioni e 3 incognite perchè la DIREZIONE di r ha dimensione 1

$$\Sigma : \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \end{cases}$$ con $rg\,\Sigma = 2$ di cui r è soluzione

$$: \begin{cases} x = \dfrac{-b_1 y - c_1 z + d_1}{a_1} \\ \dots \end{cases}$$

attraverso un esempio

$$\Sigma \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -y + z = -2 \end{cases} \quad rg\,\Sigma = 2 \quad \begin{cases} x + 2y - y + 2 = 1 \\ z = y - 2 \end{cases}$$

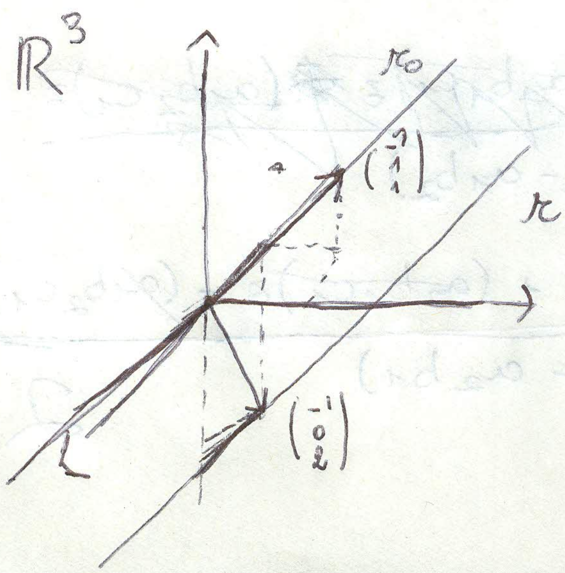
$$\begin{cases} x = -y - 1 \\ z = y - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -s - 1 \\ y = s \\ z = s - 2 \end{cases}$$ EQUAZIONE PARAMETRICA

esplicitiamo l'equazione vettoriale

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$r_0 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ sottospazio vettoriale che funge da DIREZIONE di r

$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ vettore traslazione



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

l, m, n sono parametri direttori di r definiti a meno di un fattore

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \end{cases}$$

ricaviamo i parametri direttori

considero Σ_0 sistema lineare omogeneo associato

$$\begin{cases} x = \dfrac{-b_1 y - c_1 z}{a_1} \\ \dfrac{a_2}{a_1}\left(-b_1 y - c_1 z\right) + b_2 y + c_2 z = 0 \end{cases}$$

con $a_1 \neq 0$

$$\begin{cases} +y(-b_1 a_2 + a_1 b_2) - z(a_2 c_1 - a_1 c_2) = 0 \\ \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dots \\ y = \dfrac{+z(a_2 c_1 - a_1 c_2)}{-b_1 a_2 + a_1 b_2} \end{cases}$$

sostituisco y nella prima equazione

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{a_1}\left(\dfrac{b_1 z (a_2 c_1 - a_1 c_2)}{-b_1 a_2 + a_1 b_2} + c_1 z\right) \\ \dots \end{cases}$$

$$\cancel{x = \frac{(a_2 b_1 c_1) z - (a_1 b_1 c_2) z - (a_2 b_1 c_1) z + (a_1 b_2 c_1) z}{a_1(b_1 a_2 - a_1 b_2)}}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{-\cancel{(a_2 b_1 c_1) z} + (\cancel{a_1} b_1 c_2) z + \cancel{(a_2 b_1 c_1) z} - (\cancel{a_1} b_2 c_1) z}{\cancel{a_1}(b_2 a_1 - a_2 b_1)} \\ \dots \end{cases}$$

$a_1 b_2$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = b_1c_2 - c_1b_2 = l \\ y = a_2c_1 - a_1c_2 = m \\ z = b_2a_1 - a_2b_1 = n \end{cases}$$

$$r_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

$$r_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow r_1 // r_2 \iff \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

– PIANI IN $\mathbb{R}^3$

Avrà bisogno di una equazione in 3 variabili

$$ax + by + cz + d = 0 \quad : \pi$$

$$x = \frac{-by - cz + d}{a} \Rightarrow -\frac{b}{a} y - \frac{c}{a} z = x$$

x	y	z
$-\frac{b}{a}$	1	0
$-\frac{c}{a}$	0	1

Soluzioni fondamentali

$$\begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -\frac{c}{a} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ danno una base di π_0 giacitura di π

cerchiamo una soluzione particolare del non omogeneo

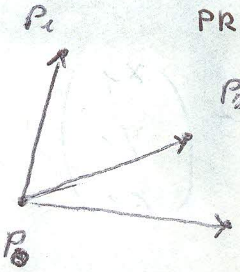
$$\begin{pmatrix} -\frac{d}{a} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ a \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -d/a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \pi$$

EQUAZIONE VETTORIALE

Sappiamo che la codimensione di un piano in $\mathbb{R}^3$ è la medesima di una retta in $\mathbb{R}^2$ ed è uguale a 1, infatti in questi casi è ~~suff~~ sufficiente una equazione per descriverli

COME PER LA RETTA DI $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & x_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$



PRENDIAMO TRE PUNTI P_0, P_1, P_2 DI $\mathbb{R}^3$ ED UN PUNTO GENERICO P

SI HA:

$$\overline{P_0P_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$$
$$\overline{P_0P_2} = (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0)$$
$$\overline{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

DÀ L'EQUAZIONE DI UN PIANO IN $\mathbb{R}^3$

PIANI PARALLELI

$\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$

$\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

sono // ?

cerco la loro giacitura

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}}$$

CONDIZIONE DI PARALLELISMO TRA PIANI

CONSIDERIAMO ORA UN PIANO π ED UNA RETTA r:

$$r \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

$\pi: ax + by + cz + d = 0$

$r \parallel \pi \Leftrightarrow r_0 \subset \pi_0$ (SOTTOSPAZI ASSOCIATI)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & c \end{pmatrix}$$ rg deve essere 2 $\Rightarrow \left| \quad \right| = 0$

sappiamo che ha rango 2 in questo caso perché r ha un sistema associato di rango 2 obbligatoriamente

ESERCIZIO

data $r: \begin{cases} x+2y-z=0 \\ -y+3z=1 \end{cases}$ dare il piano $\pi // r$

e passante per il punto $P(1,2,3)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -c-3b+5a=0$$

$$c = 5a-3b$$

$ax+by+cz+d=0$ impongo il passaggio per P

$$\begin{cases} a+2b+3c \cancel{+} d=0 \\ c=5a-3b \end{cases} \qquad \begin{cases} 16a+-7b \cancel{+15} +d=0 \\ c=5a-3b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=a \\ b=b \\ c=5a-3b \\ d=7b-16a \end{cases} \qquad \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=2 \\ d=-9 \end{cases} \qquad x+y-2z=9 : \pi$$

FASCI DI PIANI NELLO SPAZIO

DEF: Si dice fascio di piani in $\mathbb{R}^3$ la combinazione lineare di due piani dati π_1 e π_2

$\lambda \pi_1 + \mu \pi_2$. (fascio di piani) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\lambda(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\mu(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0$$

se $\lambda \neq 0$ con $\nu = \frac{\mu}{\lambda}$

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1+\nu(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0$$

si perde sicuramente il piano π_2

se $rg \begin{cases} \pi_1 \\ \pi_2 \end{cases} = 2$ allora otteniamo dei piani che si intersecano tutti in una retta! ASSE DEL FASCIO

→ fascio proprio

$rg \begin{cases} \pi_1 \\ \pi_2 \end{cases} = 1$

rg completa $=1$ → otteniamo lo stesso piano

rg completa $=2$ → piani paralleli FASCIO IMPROPRIO

5