10/04/17

~~Calcolando~~ Ricavando la matrice (DIAGONALE MEDIANTE IL METODO) di Jacobi si può stabilire la SEGNATURA di una forma quadratica, ma non si ha la BASE (ortogonale) ~~da diagonalizzare~~ alla quale tale matrice è associata.

→ dal Th. Silvester è noto che il n° entrate positive e negative sulla diagonale di una matrice diagonale associata alla forma quadratica (la sua segnatura!) SONO INVARIANTI DELLA FORMA QUADRATICA

Le coniche vengono classificate in ~~base~~ DANDONE la loro forma canonica (es. $ax^2 + by^2 = 1$, ellisse) si ha rispetto ad un unico sistema di riferimento (una base ortogonale), alla quale è associata la MATRICE CANONICA della forma diagonale e con entrate $\pm 1, 0$.

METODO DI GAUSS

(riduzione a forma canonica di una forma quadratica)
↳ si basa sull'ESPRESSIONE ANALITICA, e non sulla matrice

Sia $Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ f. quadratica; nelle variabili iniziali di $\mathbb{R}^n$, $x_1, \dots, x_n$ la forma quadratica è $Q(X) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ (POLIN. OMOGENEO II GRADO). Cerco le variabili $Y = (y_1, \dots, y_n)$ t.c. $Q(X) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j^2$ (FORMA CANONICA con soli termini al quadrato). Il metodo si dimostra per induzione sul numero delle variabili e si basa su due espressioni algebriche:

$$\boxed{x^2 + axy = \left(x + \frac{ay}{2}\right)^2 - \frac{a^2y^2}{4}} \quad \text{e} \quad \boxed{4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2}$$

espressione 1 espressione 2

Dim. 1) Se $n = 1$ $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ [OVVIO]
$x \mapsto ax^2$

(deve essere un POLIN. OMO. II GRADO, e si può avere solo x^2, essendo la forma in una sola variabile)

2) Si suppone verificata la riduzione in forma canonica fino a $n = k-1$; la si dimostra per $n = k$.

$$Q : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \to \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij} x_i x_j$$
→ forma non canonica, dalla sua espressione analitica

esempio esplicativo

$$Q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_2x_3 - x_3^2 + - x_1x_3$$

In questa espressione c'è almeno un termine al quadrato: si può supporre che ~~~~, se presente, sia ~~~~ il quadrato della prima variabile. (A MENO DI CAMBIARE L'ORDINE DEI VETTORI DI BASE)

[L'idea è quella di ISOLARE una variabile per riportarsi a UNA FORMA QUADRATICA DI $k-1$ variabili, per la quale siamo certi che si possa effettuare la riduzione A FORMA CANONICA, PER IPOTESI INDUTTIVA]

PONIAMO $Q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2x_1^2 + x_1(-3x_2 - x_3) + 4x_2x_3 - x_3^2$; IN GENERALE SE $Q(X) = \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij} x_i x_j$

$$\Rightarrow Q(\underline{X}) = a_{11}x_1^2 + x_1\underbrace{\left(\sum_{j=2}^{k} a_{1j} x_j\right)}_{\substack{\text{PARTE LINEARE in} \\ (x_2,\dots,x_k)\ (k-1 \\ \text{variabili}) = L(x_2,\dots,x_k)}} + \underbrace{Q_1(x_2, x_3, \dots, x_k)}_{\substack{\text{POLINOMIO II GR.} \\ \text{in } k-1 \text{ variabili}}}$$

$$= a_{11}\left[x_1^2 + x_1 \frac{L(x_2,\dots,x_k)}{a_{11}}\right] + Q_1(x_2,\dots,x_k) \longrightarrow \text{APPLICO espressione } 1$$

$$\to = a_{11}\left[\left(x_1 + \frac{L(x_2,\dots,x_k)}{2a_{11}}\right)^2 - \frac{\left(L(x_2,\dots,x_k)\right)^2}{4a_{11}^2}\right] + Q_1(x_2, x_3, \dots, x_k)$$

tornando all'esempio $Q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$

$$= 2\left[\underbrace{\left(x_1 + \frac{(-3x_2 - x_3)}{2 \cdot 2}\right)}_{\circledast}^2 - \frac{(-3x_2 - x_3)^2}{2 \cdot 4}\right] + 4x_2x_3 - x_3^2$$

Ora cambio variabili

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \dfrac{L(x_2,\dots,x_K)}{2a_{11}} \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \\ \vdots \\ y_K = x_K \end{cases} \implies Q(Y) = a_{11} y_1^2 + Q_2(y_2,\dots,y_K)$$

La I variabile è al quadrato, e il polinomio Q_2, in $K-1$ variabili, per ipotesi induttiva può essere ridotto in forma canonica (somma di quadrati)

$\implies$ detto Z le variabili della forma canonica (che si ricaveranno con cambi analoghi a quello ~~[illegible]~~ fatto per ricavare Y), $Q(Z)$ è somma di quadrati

nell'esempio:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - \frac{3}{4}x_2 - \frac{x_3}{4} \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

$$Q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2(⊛)^2 - \frac{9}{8}x_2^2 - \frac{x_3^2}{8} - \frac{6x_2x_3}{8} + 4x_2x_3 - x_3^2$$

$$= 2(⊛)^2 - \frac{9}{8}x_2^2 + \frac{13}{4}x_2x_3 - \frac{9}{8}x_3^2$$

$$\implies Q\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 2y_1^2 \underbrace{- \frac{9}{8}y_2^2 + \frac{13}{4}y_2y_3 - \frac{9}{8}y_3^2}$$

questa parte si ridurrà esattamente come è appena stato fatto per $Q(X)$

$$\implies 2y_1^2 - \frac{9}{8}\left(y_2^2 - \frac{13}{\cancel{4}}\frac{\overset{2}{\cancel{8}}}{9}y_2y_3\right) - \frac{9}{8}y_3^2$$ e APPLICO espressione 1

$$= 2y_1^2 - \frac{9}{8}\left[\left(y_2 - \frac{26}{9\cdot 2}y_3\right)^2 - \left(\frac{13}{9}y_3\right)^2\right] - \frac{9}{8}y_3^2 =$$

$$= 2y_1^2 - \frac{9}{8}\left(y_2 - \frac{13}{9}y_3\right)^2 + \underbrace{\frac{13^2}{9\cdot 8}y_3^2 - \frac{9^2}{8^2}y_3^2}_{= \frac{13^2-81}{72}y_3^2} \implies \begin{cases} z_1 \doteq y_1 \\ z_2 = y_2 - \frac{13}{9}y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$$

$$\implies Q(Z) = 2z_1^2 - \frac{9}{8}z_2^2 + \frac{88}{72}z_3^2$$ FORMA CANONICA

FORMA QUADRATICA NON DEGENERE (la matrice ha rg MAX, non ci sono zeri sulla diagonale) e ha SEGNATURA (2,1).

c.v.d.

La base che restituisce la forma canonica si ottiene con la COMPOSIZIONE DEI CAMBI DI BASE.

Diamo il cambiamento totale di coordinate: nell'esempio

$$\begin{cases} z_1 = x_1 - \frac{3}{4}x_2 - \frac{x_3}{4} \\ z_2 = x_2 - \frac{13}{8}x_3 \\ z_3 = x_3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3/4 & -1/4 \\ 0 & 1 & -13/8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

la matrice del cambiamento di base è una matrice associata all'applicazione identità

$$\left[id\right]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}} \qquad id : (\mathbb{R}^3, \mathcal{E}) \to (\mathbb{R}^3, \mathcal{B})$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

Per avere la base $\mathcal{B}$ bisogna ottenere

$\left[id\right]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}$, ovvero la matrice (INVERSA DI $\left[id\right]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}$), le cui colonne sono i vettori della base $\mathcal{B}$ in coordinate canoniche.

Resta da esaminare il caso in cui non siano presenti quadrati nell'espressione analitica di partenza