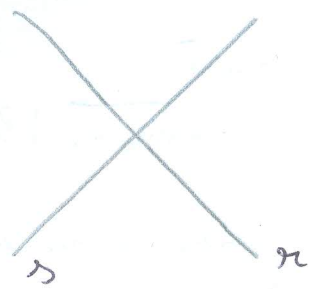
10/05/2017

Distanza fra due rette sghembe (r ed s)

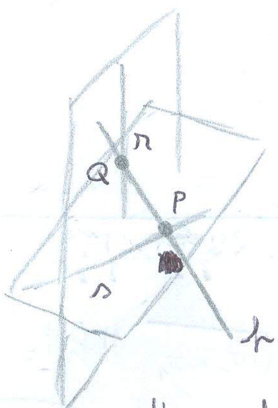


$\Pi_1(s) + \mu\, \Pi_2(s) = 0 \longrightarrow$ fascio di piani passante per s

$\Pi_1(r) + \mu\, \Pi_2(r) = 0 \longrightarrow$ fascio di piani passante per r

$ax + by + cz + d = 0$

$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ $\perp \iff a a_1 + b b_1 + c c_1 = 0$



Cerchiamo la funzione distanza fra Q e P per poi studiarne la derivata in modo da individuare il punto di minimo ~~della funzione~~.

~~[illegible]~~

p è la generica retta intersecante sia r che s

Dati K vettori di $\mathbb{R}^n$ $v_1, v_2, \dots, v_K \Rightarrow G(v_1, \dots, v_K) = \begin{vmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 & \cdots & v_1 \cdot v_K \\ \vdots & & & \vdots \\ v_K \cdot v_1 & & & v_K \cdot v_K \end{vmatrix}$

Se $v_i \perp v_j$, $\forall i \neq j \Rightarrow G(v_1, \dots, v_K) = \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 \dots \|v_K\|^2$

Se i vettori non sono ortogonali $\Rightarrow$ possiamo determinare i vettori $w_1, w_2, \dots, w_K$ ortogonali fra loro che definiscono gli stessi sottospazi L_j $\forall j \Rightarrow$ si dimostra che $G(v_1, \dots, v_K) = \|w_1\|^2 \cdot \|w_2\|^2 \cdot \|w_3\|^2 \dots \|w_K\|^2 \leq$
$\leq \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 \dots \|v_K\|^2$

Significato geometrico del Gramiano dei vettori $v_1, \dots, v_K$ di $\mathbb{R}^n$, euclideo.

Se considero il parallelepipedo P costruito in $\mathbb{R}^n$ sui vettori v_j, $j = 1, \dots, K$ cioè avente per lati i vettori $v_1, \dots, v_K \Rightarrow \mathrm{Vol}\, P = \sqrt{G(v_1, \dots, v_K)}$

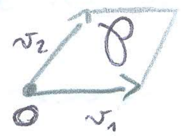
Dimostrazione

per induzione su K, # dei vettori

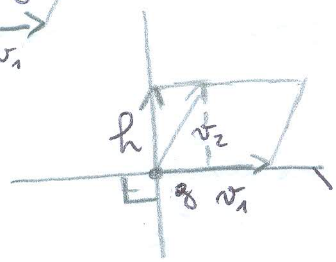
1) verifica per $K=1$ $\quad v_1 \in \mathbb{R}^n \quad Vol(v_1) = \|v_1\| = \sqrt{v_1 \cdot v_1}$

$\mathcal{P}$ degenera in un segmento di lunghezza $\|v_1\|$

2) caso $K=2$ $\quad v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ con v_1, v_2 lin. indipendenti



Area del parallelogramma $\mathcal{P} = \|v_1\| \cdot \|h\| = \sqrt{v_1 \cdot v_1}\ \|h\|$



$v_2 = g + h \Downarrow$ $\quad$ g non può che essere un multiplo di v_1

$h = v_2 - g = v_2 - \alpha v_1$

$\alpha \in \mathbb{R}$

$h = v_2 - \alpha v_1$

$\|h\| = \|v_2 - \alpha v_1\| = \sqrt{(v_2 - \alpha v_1) \cdot (v_2 - \alpha v_1)} \Rightarrow$ h È PROPRIO IL W_2 DEL TEOREMA DI ORTOGONALIZZAZIONE, INFATTI ⊛

, per quanto detto in precedenza, $\mathcal{P} = \sqrt{v_1 \cdot v_1}\ \|h\| =$

$= \sqrt{v_1 \cdot v_1}\ \|w_2\| = \sqrt{w_1 \cdot w_1}\ \|w_2\| = \|w_1\|\ \|w_2\| = \sqrt{G(v_1, v_2)}$

⊛ avevamo posto $\underline{w_1 = v_1}$ e $v_2 = g + h \Rightarrow v_2 = \alpha w_1 + h \Rightarrow$

$\Rightarrow h = v_2 - \alpha w_1 \Rightarrow \underline{w_2 = v_2 - \alpha w_1}$

pongo $h = w_2$

Supponiamo di aver dimostrato la proposizione fino a $K-1$ vettori e dimostro per K vettori.

$$Vol\,\mathcal{P}(v_1, \dots, v_K) = Vol\,\mathcal{P}(v_1, \dots, v_{K-1}) \cdot \|w_K\|$$

dove w_K è la componente di v_K lungo una direzione $\perp$ al sotto= spazio generato da $v_1, \dots, v_{K-1}$ = sottospazio generato da $w_1, \dots, w_{K-1}$

per induzione, $Vol\,\mathcal{P}(v_1, \dots, v_{K-1}) = \sqrt{G(v_1, \dots, v_{K-1})}, \Rightarrow$

$\Rightarrow Vol\,\mathcal{P}(v_1, \dots, v_K) = \sqrt{G(v_1, \dots, v_{K-1})} \cdot \|w_K\| = \underbrace{\|w_1\|\ \|w_2\| \dots \|w_{K-1}\|}\,\cdot$

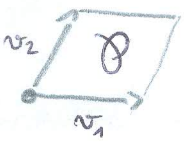
$\cdot \|w_K\| = \sqrt{G(v_1, \dots, v_K)}$.

c.v.d

Esempio

Volume del parallelepipedo costruito sui vettori $v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$, $v_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

BREVE PARENTESI



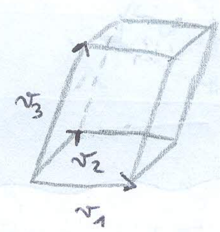
- con v_1 e v_2 linearmente indipendenti

- con v_1 e v_2 lin. dipendenti

SE SIAMO INTERESSATI ALL' AREA DI P DOBBIAMO CONSIDERARE VETTORI LIN. ~~lin.~~ INDIPENDENTI

v_1, v_2 e v_3 sono lin. indipendenti

$$Vol(P)=\sqrt{G(v_1,v_2,v_3)}$$

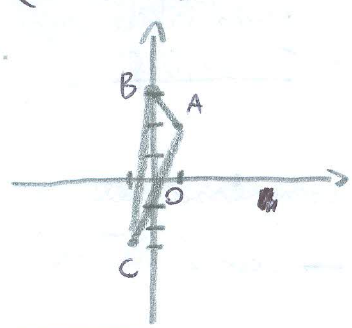


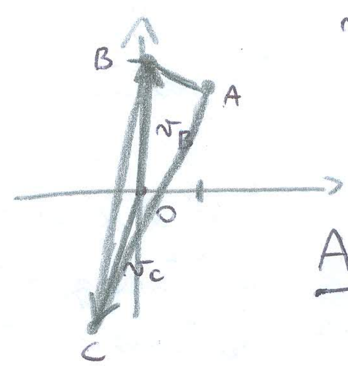
$$\begin{vmatrix} v_1\cdot v_1 & v_1\cdot v_2 & v_1\cdot v_3 \\ v_2\cdot v_1 & v_2\cdot v_2 & v_2\cdot v_3 \\ v_3\cdot v_1 & v_3\cdot v_2 & v_3\cdot v_3 \end{vmatrix} =$$

$$Vol(P)=\sqrt{9}=3$$

$$=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -5+14=9$$

Area del triangolo avente per vertici $A=(1,2)$, $B=(0,3)$, $C=(-1,-3)$





$$v_1=v_C-v_B=\begin{pmatrix}-1-0\\-3-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-6\end{pmatrix}$$

$$v_2=v_A-v_B=\begin{pmatrix}1-0\\2-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\underline{Area\ P(v_1,v_2)=\sqrt{G(v_1,v_2)}} =$$

$$=\sqrt{\begin{vmatrix} 37 & 5 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}}=\sqrt{74-25}=7 \implies \text{Area triangolo}=\frac{7}{2}$$

Sia $\mathbb{R}^n$ euclideo con base $\perp_{m}$, $\mathcal{B}=\{u_1,\dots,u_n\}$ $\Rightarrow$

PROPOSIZIONE

ORTONORMALE

$\Rightarrow$ siano $v_j=\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\, u_i$, $j=1,\dots,n$, n vettori in $\mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ $\underbrace{\text{posto}}_{A=(a_{ij})}$ $\Rightarrow$

$$(\det A)^2 = |G(v_1,\dots,v_n)| = [\mathrm{Vol}\,\mathcal{P}(v_1,\dots,v_n)]^2$$

Abbiamo quindi attribuito un significato geometrico al determinante di A.

<u>Dimostrazione</u>

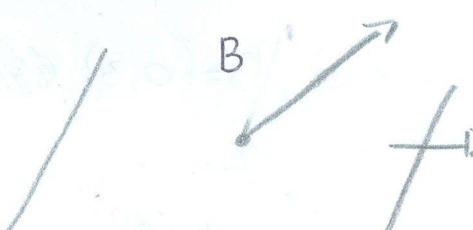
$$v_k\cdot v_j = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\, u_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\, a_{ij} =$$

$$= \underset{\overset{\parallel}{|A|^2}}{|A^T A|} = G(v_1,\dots,v_n)$$

Dato il sistema $\Sigma: AX=B$, è risolvibile $\Leftrightarrow$ $rg(A)=rg(A:B)$

Scriviamo Σ $\quad x_1 C_1(A)+x_2 C_2(A)+\dots+x_n C_n(A)=B$

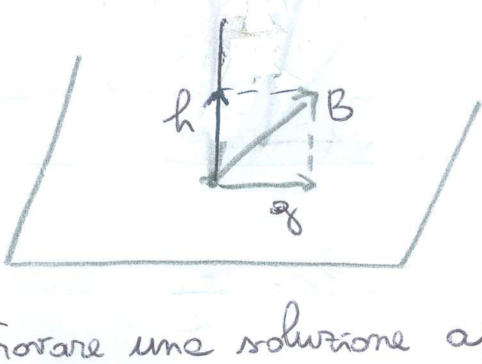
COLONNA i-ESIMA



B non appartiene a

$\Rightarrow$ $\langle\langle C_1(A),\dots,C_n(A)\rangle\rangle$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Il sistema non è ~~risolubile~~ risolvibile



$\|h\|$ è l'errore commesso nel sostituire g a B ~~nel~~ come vettore dei termini noti

Per trovare una soluzione approssimata del sistema posso ~~usare~~ sostituire g a B. E RISOLVERLO