ESERCIZIO: DIMOSTRIAMO L'ESISTENZA PER LE MATRICI DELL' ELEMENTO NEUTRO DELLA SOMMA: $A=(a_{ij})_{n\times k}$ E $B=(b_{ij})_{n\times k}$ | $A\tilde{+}B=A$

$$\Rightarrow (a_{ij})\,\tilde{+}\,(b_{ij}) = (a_{ij}) \qquad (a_{ij}+b_{ij}) = (a_{ij})$$

$$\Rightarrow a_{ij}+b_{ij} = a_{ij} \quad \forall i=1\dots n,\ J=1\dots K$$

$$\cancel{a_{ij}}+b_{ij}-\cancel{a_{ij}}=0 \Rightarrow b_{ij}=0$$

$$\Rightarrow B=(0)= \text{MATRICE NULLA} = 0$$

DATA LA MATRICE $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\-1&-1&-1&-1\\2&-3&0&2\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ DATA LA MATRICE A DETERMINARNE IL RANGO CON IL METODO DI ELIMINAZIONE DI GAUSS.

SI ADOPERANO LE "OPERAZIONI ELEMENTARI RIGA":

1) SCAMBIO DI DUE RIGHE.

2) MOLTIPLICAZIONE DI UNA RIGA PER UNO SCALARE

3) SOSTITUZIONE DI UNA RIGA OTTENUTA SOMMANDO TALE RIGA CON UN'ALTRA DELLA MATRICE.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\-1&-1&-1&-1\\2&-3&0&2\end{pmatrix} \quad R_1+R_2 \xrightarrow{\text{VIENE SOSTITUITA A}} R_2 \quad 2R_1-R_3 \longrightarrow R_3 \quad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&7&6&6\end{pmatrix} = B$$

PRIMA RIGA HA PRIMO ELEMENTO NON NULLO QUINDI SARÀ IL PRIMO PIVOT

NUOVA MATRICE EQUIVALENTE A QUELLA PRECEDENTE

$\boxed{\text{}}$

SI DICONO EQUIVALENTI DUE MATRICI OTTENUTE MEDIANTE OPERAZIONI ELEMENTARI RIGA.
IL SIMBOLO DI EQUIVALENZA È "$\sim$"
UNA SOTTOMATRICE DI UNA MATRICE DATA SI OTTIENE TOGLIENDO RIGHE E/O COLONNE DALLA MATRICE DATA. Esempio $\begin{pmatrix}1&2&3\\7&6&6\end{pmatrix}$ È SOTTOMATRICE DI B

$$B=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&7&6&6\end{pmatrix} \xrightarrow{7R_2-R_3\to R_3} \sim \begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&8&15\end{pmatrix}$$

IL RANGO È 3 POICHÉ ABBIAMO 3 PIVOT. (SONO QUELLI CERCHIATI)

MA ADESSO TORNIAMO SU (LA PARTE IN ASCESA DEL) CON METODO DI GAUSS:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&8&15\end{pmatrix} \xrightarrow{4R_2-R_3\to R_2} \sim \begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&4&0&-3\\0&0&8&15\end{pmatrix} \xrightarrow{8R_1-3R_3\to R_1} \sim \begin{pmatrix}8&16&0&-13\\0&4&0&-3\\0&0&8&15\end{pmatrix} \xrightarrow{R_1-4R_2+R_1} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix}8&0&0&-1\\0&4&0&-3\\0&0&8&15\end{pmatrix} \begin{matrix}\frac{R_1}{8}\to R_1\\ \frac{R_2}{4}\to R_2\\ \frac{R_3}{8}\to R_3\end{matrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{1}{8}\\0&1&0&-\frac{3}{4}\\0&0&1&-\frac{15}{8}\end{pmatrix}$$

LA MATRICE COSÌ OTTENUTA È EQUIVALENTE ALLA MATRICE A E A TUTTE QUELLE INTERMEDIE.

QUESTA MATRICE FINALE RAPPRESENTA LA "FORMA A GRADINI CANONICA" DELLA MATRICE A.

LA RELAZIONE DI EQUIVALENZA TRA MATRICI DELLO STESSO ORDINE È UNA RELAZIONE DI EQUIVALENZA, CIOÈ:

1) SIMMETRICA SE $A \sim B \Rightarrow B \sim A$
2) RIFLESSIVA SE $A \sim A$
3) TRANSITIVA SE $A \sim B$ E $B \sim C \Rightarrow A \sim C$

(DA DIMOSTRARE)

(SI DEVE DIMOSTRARE PER OGNI OPERAZIONE ELEMENTARE, SINGOLARM.)

~~QUANDO CI SONO DEI PARAMETRI DOVREMO IMPORRE DELLE CONDIZIONI CHE DOVRANNO ESSERE VERIFICATE ALLA FINE.~~

OGNI CLASSE DI EQUIVALENZA RAPPRESENTA UN SISTEMA (CIOÈ LE MATRICI DI UNA CLASSE SONO ASSOCIATE A SISTEMI ≠ MA CON LE STESSE SOLUZIONI). L'INSIEME DELLE CLASSI DI EQUIVALENZA SI CHIAMA INSIEME QUOZIENTE.

TUTTE LE MATRICI DI UNA STESSA CLASSE DI EQUIVALENZA HANNO LO STESSO RANGO.

DATA LA MATRICE $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ QUADRATA, VOGLIAMO ASSOCIARE UN ULTERIORE SCALARE AD ESSA, OLTRE IL SUO RANGO.

AD UNA MATRICE QUADRATA AD ENTRATE REALI SI ASSOCIA UN NUMERO REALE DETTO <u>DETERMINANTE</u>. VEDIAMO COME OTTENERLO PER INDUZIONE SULL'ORDINE DELLA MATRICE.

SE LA MATRICE QUADRATA È 1X1, AD ESEMPIO $A = \alpha \Rightarrow$ IL DETERMINANTE DI A, CHE SI INDICA CON "$|A|$", OPPURE "$\|A\|$" È α;

SE LA MATRICE È 2X2; $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} a_{12}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$\in \mathcal{M}_{3\times 3} \qquad + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

(SONO PRESE LE ENTRATE DELLA PRIMA RIGA: SI PUÒ SCEGLIERE UNA RIGA O UNA COLONNA QUALUNQUE)

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 1 \cdot 1 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 - 4 + 15 = 8$$

E COSÌ VIA.

IN GENERALE:

DATA LA MATRICE $A \in \mathcal{M}_{n \times n} \Rightarrow |A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot |A_{\hat{i}\hat{j}}|$

DOVE È STATA SCELTA LA i-ESIMA RIGA E DOVE $A_{\hat{i}\hat{j}}$ È LA SOTTOMATRICE $(n-1) \times (n-1)$ OTTENUTA DA A TOGLIENDO LA i-ESIMA RIGA E LA j-ESIMA COLONNA.

DETERMINANTE SECONDO LAGRANGE

VEDIAMO COME CAMBIANO IL DETERMINANTE DI UNA MATRICE LE OPERAZIONI ELEM.

- LO SCAMBIO DI DUE RIGHE IN A CAMBIA IL SEGNO DEL DETERMINANTE
- LA SOSTITUZIONE DI UNA RIGA CON LA SOMMA DI TALE RIGA (CON UN'ALTRA RIGA) NON CAMBIA IL DETERMINANTE.
- MOLTIPLICO RIGA PER SCALARE: IL DETERMINANTE VIENE ANCH'ESSO MOLTIPLICATO PER LO SCALARE.
- QUINDI IL RANGO È INVARIANTE PER EQUIVALENZA MA IL DETERMINANTE NO!
- SE IL DETERMINANTE È NULLO, POSSO FARE QUALSIASI OPERAZIONE ~~[illegible]~~

ELEMENTARE RIGA, OTTENENDO MATRICI EQUIVALENTI CON DETERMINANTE NULLO. (*)

POICHÈ NON CAMBIA IL DETERMINANTE L'OPERAZIONE DI SOSTITUZIONE DI UNA RIGA CON LA SOMMA DI TALE RIGA CON UN'ALTRA È DETTA DETERMINANTALE

PER RISPARMIARE CONTI, SE LA MATRICE È DI ORDINE ALTO, POSSIAMO VERIFICARE LA NULLITÀ DEL SUO DETERMINANTE, FACENDONE IL CALCOLO SU UNA MATRICE EQUIVALENTE IN CUI ABBIAMO OTTENUTO DEGLI ZERI IN UNA RIGA: ANDREMO ALLORA A SVILUPPARNE IL DETERMINATE SECONDO PROPRIO QUELLA RIGA:

ESEMPIO:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} a_{21} |A_{\widehat{21}}| + (-1)^{2+2} a_{22} |A_{\widehat{22}}| + (-1)^{2+3} a_{23} |A_{\widehat{23}}| =$$

$$= -0 \cdot |A_{\widehat{21}}| + 5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 0 \cdot |A_{\widehat{23}}|$$

$$= 0 + 5 \cdot 2 - 0 = 10$$

SE LA MATRICE È DIAGONALE, $D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$,

$$\Rightarrow |D| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

(DA DIMOSTRARE)

(*) INFATTI

NOTIAMO CHE NELL'OPERAZIONE ELEMENTARE RIGA IN CUI SI MOLTIPLICA UNA RIGA PER UNO SCALARE, LO SCALARE DEVE ESSERE DIVERSO DA ZERO, PER NON ANNULLARE L'INTERA RIGA.

(SI FACCIA ATTENZIONE QUANDO TRA LE ENTRATE DELLA MATRICE SONO PRESENTI PARAMETRI)